Teorie her

Ondřej Chwiedziuk

Teorie her

Co je to hra?

Teorie her studuje situace, kde výsledek závisí na rozhodnutích **více aktérů** — každý sleduje vlastní zájem, ale výsledek pro každého závisí i na tom, co dělají ostatní.

Příklady jsou všude: deskové hry (poker, monopoly, výbušná koťátka), ale také volby, obchodování na burze, evoluce, routování v síti, čekání ve frontě, jízda autobusem nebo dodržování předpisů.

Matematický model hry tvoří čtyři složky:

- **Hráči** — konečná množina aktérů, zpravidla $(A, B, \ldots)$
- **Akce** — každý hráč má svoji množinu dostupných akcí, např. A_1, A_2 pro hráče A a B_1, B_2, B_3 pro hráče B
- **Užitková funkce** μ — přiřadí každé kombinaci akcí číslo vyjadřující, jak dobré je pro daného hráče
- **Strategie** — pravidlo, podle nějž hráč volí akci; v nejjednodušším případě je to výběr jedné akce, obecně může být náhodná (viz míchané strategie)

Nejjednodušší model je **statická hra s úplnou informací**:

- Hráči volí své strategie **najednou** (nebo alespoň bez znalosti toho, co právě volí soupeř)
- **Úplná informace** znamená, že každý hráč zná užitkové funkce všech hráčů — tedy ví, co je dobré pro každého
- Navíc platí **společná znalost** (*common knowledge*): každý ví, že ostatní vědí; každý ví, že ostatní vědí, že on ví; a tak dál do nekonečna. Bez tohoto předpokladu by strategie nemohly záviset na racionálních očekáváních o chování soupeřů
- Hru lze zapsat jako **bi-matici**: řádky odpovídají akcím hráče A, sloupce akcím hráče B, každá buňka obsahuje dvojici užitků (μ_A, μ_B)

Dominantní strategie. Říkáme, že strategie s *striktně dominuje* strategii s' pro hráče A, pokud:

$$\mu_A(s, s_B) > \mu_A(s', s_B) \quad \text{pro všechna } s_B.$$

Racionální hráč nikdy nezahraje striktně dominovanou strategii — bez ohledu na to, co dělá soupeř, existuje vždy lepší volba. Postupným odstraňováním dominovaných strategií (*iterated elimination of dominated strategies*) lze někdy hru výrazně zjednodušit nebo rovnou vyřešit.

Příklad: Vězňovo dilema

Dva podezřelí jsou vyslýcháni odděleně. Každý se může buď **mlčet (M)** nebo **zradit (Z)**. Trest závisí na kombinaci jejich rozhodnutí:

$A \backslash B$	M	Z
M	(3, 3)	(0, 5)
Z	(5, 0)	(1, 1)

Čísla jsou roky svobody (vyšší = lepší). Hráč A volí řádek, hráč B sloupec, levé číslo v každé buňce je výsledek pro A, pravé pro B.

Bez ohledu na to, co zvolí B: pokud B mlčí, A dostane 5 za zradu vs. 3 za mlčení, tedy je lepší zradit. Pokud B zradí, A dostane 1 za zradu vs. 0 za mlčení, tedy je opět lepší zradit. **Zradit (Z) striktně dominuje mlčet (M)** pro oba hráče. Dominovanou strategii M lze rovnou vyloučit.

Nashovo equilibrium

Jak předpovědět, co racionální hráči zahrají? Potřebujeme koncept stability.

Definice: Profil strategií (s_A^*, s_B^*) je **Nashovo equilibrium (NE)**, pokud žádný hráč nemůže zvýšit svůj užitek jednostrannou změnou strategie:

$$\mu_A(s_A^*, s_B^*) \geq \mu_A(s_A, s_B^*) \quad \text{pro všechna } s_A$$

$$\mu_B(s_A^*, s_B^*) \geq \mu_B(s_A^*, s_B) \quad \text{pro všechna } s_B$$

Jinými slovy: žádný hráč toho nelituje, pokud zná volbu soupeře. NE je **predikce** racionálního chování — ne nutně výsledek, který je nejlepší pro všechny.

Jak NE najít v bi-matici? — metoda nejlepší odpovědi (*best response*):

1. Pro každý sloupec B podtrhni maximum v daném sloupci (nejlepší odpověď A na každou akci B).

2. Pro každý řádek A podtrhni maximum v daném řádku (nejlepší odpověď B na každou akci A).
3. Buňka, kde jsou podtržena **obě** čísla, je NE — oba hráči si navzájem odpovídají nejlépe.

Příklad (Vězňovo dilema):

$A \backslash B$	M	Z
M	$(3,\ 3)$	$(0,\ \underline{5})$
Z	$(\underline{5},\ 0)$	$(\underline{1},\ \underline{1})$

Jediné NE je $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})$ s výsledkem $(1, 1)$ — přestože (M, M) dává oběma víc! Zrada je dominantní strategie pro oba hráče, takže v rovnováze oba zradí a oba na tom tratí.

NE nemusí být jediné, a nemusí být "spravedlivé" ani "efektivní". Je to pouze předpověď racionálního chování.

Příklad (Koordinační hra):

$A \backslash B$	L	R
L	$(\underline{2},\ \underline{3})$	$(0,\ 0)$
R	$(0,\ 0)$	$(\underline{3},\ \underline{2})$

Hráči se musí domluvit na stejné volbě. Hra má **dvě NE** v čistých strategiích: (L, L) a (R, R). Problém koordinace: obě rovnováhy jsou stabilní, ale jak se hráči bez komunikace dohodnou? V praxi pomáhají tzv. *focal points* (Schellingovy body) — přirozeně výrazné možnosti, na které lidé konvergují i bez dohody (např. „sejdeme se na nádraží").

Příklad (Diskoordinační hra — Matching Pennies):

$A \backslash B$	L	R
L	$(1,\ -1)$	$(-1,\ 1)$
R	$(-1,\ 1)$	$(1,\ -1)$

Hráč A chce hrát totéž co B, hráč B chce hrát něco jiného. Zkusme najít NE metodou best response:

- Pokud B hraje L: A preferuje L $(1 > -1)$. Pokud B hraje R: A preferuje R $(1 > -1)$.
- Pokud A hraje L: B preferuje R $(1 > -1)$. Pokud A hraje R: B preferuje L $(1 > -1)$.

Žádná buňka nemá podtržena obě čísla — hra **nemá NE v čistých strategiích**. Jak z této šlamastyky ven?

Míchané strategie

Zavedeme do našeho problému pravděpodobnost!

Řešení: Míchané strategie. Hráč nevolí jednu akci deterministicky, ale **hraje náhodně** podle rozdělení pravděpodobnosti. Hráč A hraje L s pravděpodobností p a R s pravděpodobností $1-p$, hráč B hraje L s pravděpodobností q a R s pravděpodobností $1-q$.

Užitek pak počítáme jako **střední hodnotu** přes všechny kombinace akcí:

$$\mu_A(p,q) = pq\cdot\mu_A(L,L)+p(1-q)\cdot\mu_A(L,R)+(1-p)q\cdot\mu_A(R,L)+(1-p)(1-q)\cdot\mu_A(R,R)$$

Jak najít míchané NE? Klíčový princip: *v rovnováze musí být hráč lhostejný mezi akcemi, které hraje s nenulovou pravděpodobností* — jinak by přesunul veškerou pravděpodobnost na lepší akci a přestal míchat.

Pro míchané NE hledáme q takové, aby byl A lhostejný mezi L a R:

$$\begin{gathered}\mu_A(L) = \mu_A(R)\\ q\cdot 1 + (1-q)\cdot(-1) = q\cdot(-1) + (1-q)\cdot 1\\ 2q-1 = 1-2q \implies q = \tfrac{1}{2}\end{gathered}$$

Symetricky pro B (hledáme p takové, aby byl B lhostejný): $p = \frac{1}{2}$.

Míchané NE je tedy: A i B hrají každou akci s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Očekávaný užitek obou hráčů je 0 — hra je fér, ale nikdo není schopen soupeře „přechytračit".

Intuice: Pokud by A hrál L příliš často, B by začal hrát výhradně R (kde vydělává). Rovnováha nastane přesně tehdy, když je soupeř skutečně lhostejný — nemá motivaci reagovat.

Nashova věta (1950): Každá konečná hra s úplnou informací má alespoň jedno Nashovo equilibrium (v čistých nebo míchných strategiích). John Nash za tento výsledek obdržel Nobelovu cenu za ekonomii v roce 1994. Míchané NE tak zaručuje, že rovnováha vždy existuje — i když ji hráči realizují náhodností, ne deterministickou volbou.

Spolupráce je lepší

Vězňovo dilema ukazuje znepokojivý jev: **racionální chování vede k horšímu výsledku pro všechny.**

Cena anarchie (*Price of Anarchy*):

Porovnáme NE s tzv. *sociálním optimem* — výsledkem, který maximalizuje součet užitků všech hráčů:

Výsledek	Součet užitků
(M, M) — sociální optimum	$3 + 3 = 6$
(Z, Z) — Nashovo equilibrium	$1 + 1 = 2$

$$\text{Cena anarchie} = \frac{\text{sociální optimum}}{\text{NE}} = \frac{6}{2} = 3$$

Racionální chování tu stojí společnost trojnásobek optimálního výsledku. Obecně platí: čím vyšší cena anarchie, tím větší škoda způsobená tím, že hráči jednají sobecky místo koordinovaně.

Tragédie obecní pastviny (Hardin, 1968): Vesničané sdílejí pastvinu. Každý má motivaci přidat další krávu (zisk jen pro něj), ale náklady přepasení nese celá vesnice. V NE je pastvina zničena, přestože společná dohoda o omezení by všem prospěla. Příklady v praxi: nadměrný rybolov, emise CO_2, přetížení internetu.

Braessův paradox (routování v síti): Přidání nové silnice může zpomalit všechny řidiče. Každý řidič si racionálně zvolí nejkratší trasu — jejich souhrnné chování přetíží novou cestu a výsledná rovnováha je pomalejší než bez ní. NE v dopravní síti je obecně suboptimální; sociální optimum by vyžadovalo centrální koordinaci (nebo mýtné).

Jak z toho ven? Čtyři základní mechanismy:

1. **Opakovaná hra** — pokud hráči interagují opakovaně (a hra nekončí pevně daným kolem), může spolupráce vzniknout spontánně. „Tit-for-tat" (začnu spoluprací, pak kopíruji soupeřův poslední tah) je v turnajích opakovaného vězňova dilematu extrémně úspěšné.
2. **Mechanismus design** (*mechanism design* / „reverzní teorie her") — místo předpovídání výsledku existující hry navrhujeme pravidla hry tak, aby NE splývalo se sociálním optimem. Příklady: aukce, daňové systémy, regulace trhu.
3. **Komunikace a závazky** — závazné smlouvy nebo právně vymahatelné dohody mění strukturu hry a mohou eliminovat dominantní strategii zrady.

4. **Změna užitkové funkce** — reputace, sociální normy nebo altruismus efektivně mění výplaty: „cena" za zradu zahrnuje i ztrátu důvěry, takže spolupráce se stane racionální.

Kartely vznikají samovolně

Proč spolu firmy někdy "drží ceny" i bez smlouvy, tajné schůzky nebo přímé komunikace?

Jednorázově má každá firma motivaci zradit: podstřelit cenu a získat trh. V **opakované hře** se ale mění pobídky, protože dnešní zrada ovlivní budoucí reakci soupeře.

Uvažuj dvě firmy, které v každém období volí:

- M = držím vysokou cenu (spolupráce),
- Z = podstřelím cenu (zrada).

Budoucnost diskontují faktorem $\delta \in (0, 1)$.

Grim Trigger: Začni s M. Jakmile soupeř jednou zahraje Z, hraj už navždy Z.

Při této strategii je spolupráce racionální, pokud se nevyplatí jednorázově vybočit:

$$\frac{\mu(M, M)}{1 - \delta} \geq \mu(Z, M) + \frac{\delta\, \mu(Z, Z)}{1 - \delta}.$$

Levá strana je hodnota "spolupracuji navždy". Pravá strana je "teď zradím, pak přijde trvalý trest". Pro dostatečně vysoké δ (trpělivé firmy) nerovnost platí, takže ani čistě sobecká firma nechce začít cenovou válku.

Tit-for-Tat (oko za oko): V prvním kole hraj M, pak vždy zopakuj poslední tah soupeře.

Tato strategie je mírnější než Grim Trigger: odměňuje spolupráci, ale po jednorázové zradě netrestá navždy. V prostředí s malým šumem (omyl, špatná informace) bývá robustnější, protože umožňuje "návrat" ke spolupráci.

Závěr: Kartelní výsledek může vzniknout **i bez komunikace**. Stačí, že firmy opakovaně interagují, pozorují minulé chování a jsou dost trpělivé. Kooperace pak není altruismus ani dohoda, ale rovnovážná strategie vyplývající z hrozby budoucího trestu.

Volební systémy

Příběh: Ženevské jezero

Obyvatelé Ženevy hlasují, zda si přejí překlenout Ženevské jezero. Mají na výběr ze tří možností: překlenout jezero mostem (M), postavit pod jezerem tunel (T), nebo nepostavit vůbec nic (N).

Obyvatelé mají preference s následující distribucí:

Skupina	Popis	Pořadí preferencí	Podíl
1	Přejí si přejezd přes jezero, preferují **most** (chodci-friendly)	$M > T > N$	**31 %**
2	Přejí si přejezd přes jezero, preferují **tunel** (nezkazí výhled)	$T > M > N$	**5 %**
3	Nechtějí stavět nic, ale pokud ano, tak **most**	$N > M > T$	**28 %**
4	Nechtějí stavět nic, ale pokud ano, tak **tunel**	$N > T > M$	**5 %**
5	Chtějí postavit **most**, popř. nic	$M > N > T$	**5 %**
6	Chtějí postavit **tunel**, popř. nic	$T > N > M$	**26 %**

Condorcetův cyklus

Porovnáme kandidáty párově — každé „volby dvou”:

- **Most vs. Tunel:** Skupiny 1, 3, 5 preferují Most → **64 %**. Skupiny 2, 4, 6 preferují Tunel → 36 %. **Most vítězí.**
- **Tunel vs. Nic:** Skupiny 1, 2, 6 preferují Tunel → **62 %**. Skupiny 3, 4, 5 preferují Nic → 38 %. **Tunel vítězí.**
- **Nic vs. Most:** Skupiny 4, 3, 6 preferují Nic → **59 %**. Skupiny 1, 2, 5 preferují Most → 41 %. **Nic vítězí.**

Vzniká cyklus: **Most** $\succ$ **Tunel** $\succ$ **Nic** $\succ$ **Most**. Neexistuje žádný kandidát, který by porazil všechny ostatní v přímém souboji – to je **Condorcetův cyklus** (nebo Condorcetův paradox).

Požadavky na volební systém

Hledáme funkci f, která zobrazí preference všech voličů na společenské pořadí. Chceme, aby splňovala:

1. **Universální doména (U):** Funkce f musí být definována pro *libovolný* profil preferencí voličů — žádná kombinace preferencí nesmí systém „rozbít" nebo vést k nedefinovanému výsledku.
2. **Nezávislost na nepodstatných alternativách (IIA):** Společenské pořadí dvou kandidátů x a y závisí *výhradně* na tom, jak každý volič porovnává x a y navzájem. Přidání, odebrání nebo přeuspořádání třetího kandidáta z nesmí změnit výsledek souboje x vs. y.
3. **Nenucenost / Paretovo kritérium (P):** Pokud *všichni* voliči preferují x před y, musí i společenské pořadí řadit x před y. Žádný výsledek nesmí být vnucen bez ohledu na skutečné preference voličů.

První na pásce (First Past the Post)

Jak funguje? Každý volič hlasuje pro jednoho kandidáta. Zvítězí ten, kdo obdrží nejvíce hlasů (pluralitu).

Výsledek s naším profilem:

Kandidát	Hlasy (první volby)
Most	skupiny $1 + 5 = 36\%$ (vítěz)
Nic	skupiny $3 + 4 = 33\%$
Tunel	skupiny $2 + 6 = 31\%$

Kde se to rozbije? Most vyhraje s 36 % hlasů, přestože **59 % voličů preferuje Nic před Mostem** v přímém souboji. Zároveň systém porušuje **IIA**: pokud z voleb odstraníme Tunel (který v pluralitě prohrál a zdánlivě je „nepodstatný"), přímý souboj Most vs. Nic dá 41 % vs. 59 % — vítěz se změní z Mostu na Nic. Přítomnost „nepodstatného" Tunelu tedy rozhodla volby.

Dvoukolový systém

Jak funguje? V prvním kole hlasuje každý pro svého favorita. Kandidát s nejméně hlasy je vyřazen. Ve druhém kole se volí mezi zbývajícími dvěma.

Výsledek s naším profilem:

Kolo 1: Most = 36 %, Nic = 33 %, Tunel = 31 %. → Tunel je vyřazen.

Kolo 2: Most vs. Nic. Skupiny s Tunelem na prvním místě jdou ke svým druhým preferencím: skupina 2 ($T > M > N$) hlasuje pro Most, skupina 6 ($T > N > M$) hlasuje pro Nic.

Kandidát	Kolo 2
Most	skupiny 1 + 2 + 5 = 41 %
Nic	skupiny 3 + 4 + 6 = **59 %** (vítěz)

Kde se to rozbije? Tunel byl vyřazen jako „nejhorší" na základě počtu prvních voleb — přestože **62 % voličů preferuje Tunel před Nic** v přímém souboji. Eliminovaný kandidát by porazil vítěze voleb. Systém navíc porušuje **IIA**: kdybychom vyřadili Most (s 31 % by byl nejslabší), ve finále by šel Tunel vs. Nic a Tunel by vyhrál 62 : 38. Různé „pořadí vyřazení" dávají různé vítěze — výsledek závisí na kandidátech, kteří nakonec ani nevyhráli.

Systém 21

Jak funguje? Každý volič přidělí svým dvěma nejpreferovanějším kandidátům **+1 bod** a svému nejméně preferovanému kandidátovi **-1 bod**. Zvítězí kandidát s nejvyšším celkovým skóre. (Jde o variantu Bordovy metody.)

Výsledek s naším profilem (sincerní hlasování):

Skupina	Váha	+1 +1 -1
1	31 %	+M +T -N
2	5 %	+T +M -N
3	28 %	+N +M -T
4	5 %	+N +T -M
5	5 %	+M +N -T
6	26 %	+T +N -M

Skóre: - **Most** $= (31+5+28+5)-(5+26) = 69-31 = 38$ - **Tunel** $= (31+5+5+26)-(28+5) = 67-33 = 34$ - **Nic** $= (28+5+5+26)-(31+5) = 64-36 = 28$

Most vítězí se skóre 38.

Kde se to rozbije? Systém porušuje **IIA**: odstraňme Tunel a aplikujme systém 21 jen na dvojici Most vs. Nic. Ten degeneruje na přímé hlasování: 59 % preferuje Nic před Mostem, tedy **Nic vítězí**. Tunel — kandidát, který sám nevyhrál — svou přítomností zcela obrátil výsledek voleb. Jinými slovy: výsledek souboje Most vs. Nic závisí na tom, jak voliči hodnotí Tunel, ačkoli Tunel „není relevantní" pro tento souboj.

Diktatura

Jak to funguje? Jeden předem určený volič — diktátor — si zvolí, co se postaví. Ostatní voliči nemají žádný vliv.

Kde se to rozbije? Nerozbije — splňuje U, IIA i P. Právě to je podstatou Arrowovy věty.

Arrowova věta

Tři systémy výše (první na pásce, dvoukolový, systém 21) se liší v tom, které z podmínek porušují — ale každý z nich musí nutně porušit alespoň jednu z U, P, IIA, nebo musí mít diktátora. Arrow říká, že není úniku: **při třech a více kandidátech neexistuje dokonalý demokratický volební systém**.

Tvrzení: Neexistuje žádná volební funkce f pro tři a více kandidátů, která by splňovala současně universální doménu (U), Paretovo kritérium (P), nezávislost na nepodstatných alternativách (IIA) a nediktátorství.

Jinak řečeno: každý volební systém splňující U, P a IIA musí mít **diktátora**.

Částečné řešení nabízí **majority vote (Condorcetova metoda)**: za vítěze je prohlášen ten kandidát, který v přímém souboji porazí všechny ostatní (tzv. Condorcetův vítěz). Pokud takový kandidát neexistuje (jak v našem příkladu — nastane Condorcetův cyklus), jsou volby prohlášeny za **neplatné**. Tato metoda je spravedlivá a splňuje IIA, ale není vždy rozhodná.

Důkaz

Definice. *Volební funkce* je zobrazení $f : P^n \to P$, kde P je množina všech úplných tranzitivních preferencí nad kandidáty. Říkáme, že volič i je **rozhodující** nad párem (x, y), pokud: kdykoliv i preferuje x před y, platí $x \succ_S y$ bez ohledu na preference ostatních voličů.

Budeme pracovat s kandidáty M (Most), T (Tunel), N (Nic) – označme je obecně a, b, c.

Krok 1 — Existence pivotního voliče Zafixujeme kandidáta b. Uvažme sekvenci profilů $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (kde n je počet voličů):

- V profilu P_0 mají *všichni* voliči b **na posledním místě** (ostatní preference jsou libovolné pevné).
- Pro $k = 1, \ldots, n$: profil P_k vznikne z P_0 tím, že voliči $1, \ldots, k$ přesunou b na **první místo** (ostatní relativní pořadí zachovají). Voliči $k+1, \ldots, n$ mají b stále poslední.

Ze **Paretova kritéria** plyne:

- V P_0 preferují všichni b před a i b před c? Ne – v P_0 je b poslední, takže všichni preferují a i c před b. Ze Pareto: $a \succ_S b$ a $c \succ_S b$, tedy b **je sociálně nejhorší** v P_0.
- V P_n je b pro všechny první. Ze Pareto: $b \succ_S a$ a $b \succ_S c$, tedy b **je sociálně nejlepší** v P_n.

Přechod z P_0 (b dole) do P_n (b nahoře) musí proběhnout v diskrétních krocích. Existuje tedy **pivotní volič** i^* takový, že:

- V P_{i^*-1} je b sociálně **dole** (b není na vrcholu sociálního pořadí).
- V P_{i^*} je b sociálně **nahoře** (b je na vrcholu sociálního pořadí).

Krok 2 — Pivotní volič je diktátor nad každou dvojicí Ukážeme, že i^* je rozhodující nad libovolnou dvojicí (x, y), kde $x \neq b$ a $y \neq b$ (tedy nad párem $\{a, c\}$ v naší trojici). Argument pro páry zahrnující b je analogický.

Zkonstruujeme pomocný profil $\mathbf{Q}$ (přípustný díky U):

- **Volič** i^* má: $x \succ b \succ y$ (b je uprostřed, x preferuje před b a b před y)
- **Voliči** $1, \ldots, i^* - 1$ (ti, kteří jsou "před" pivotem): mají b na **prvním místě** a preferují y před x

- **Voliči** $i^* + 1, \ldots, n$ (ti, kteří jsou "za" pivotem): mají b na **posledním místě** a preferují y před x

Analýza páru (b, x) pomocí IIA: V profilu Q porovnává každý volič b a x takto: voliči $1, \ldots, i^* - 1$ mají $b \succ x$ (b je první), volič i^* má $x \succ b$, voliči $i^* + 1, \ldots, n$ mají $x \succ b$ (b je poslední). Toto pořadí (b, x) je totožné jako v profilu P_{i^*-1}. V P_{i^*-1} je b sociálně dole, tedy $x \succ_S b$. Pomocí IIA: $x \succ_S b$ **v** Q.

Analýza páru (b, y) pomocí IIA: V profilu Q porovnává každý volič b a y: voliči $1, \ldots, i^*$ mají $b \succ y$ (volič i^* má $b \succ y$, protože jeho pořadí je $x \succ b \succ y$), voliči $i^* + 1, \ldots, n$ mají $y \succ b$. Toto pořadí (b, y) je totožné jako v profilu P_{i^*}. V P_{i^*} je b sociálně nahoře, tedy $b \succ_S y$. Pomocí IIA: $b \succ_S y$ **v** Q.

Závěr pro pár (x, y): Z $x \succ_S b$ a $b \succ_S y$ a tranzitivity plyne $x \succ_S y$ **v** Q.

Pomocí IIA závisí sociální pořadí x vs. y pouze na individuálních preferencích x vs. y. V Q preferuje x před y **jedině volič** i^* (všichni ostatní preferují y před x). Přesto $x \succ_S y$. To znamená, že i^* je rozhodující nad (x, y): kdykoliv i^* preferuje x před y (a ostatní preferují y před x), platí $x \succ_S y$.

Symetrickým argumentem pro všechny trojice kandidátů a všechny páry (postupnou aplikací téhož konstruktu) se ukáže, že i^* je rozhodující nad **každým párem** kandidátů.

i^* **je tedy diktátor.**