STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor: 1. Matematika a statistika

Goniometrie v antice

Ondřej Chwiedziuk

Liberec 2021

STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

GONIOMETRIE V ANTICE

ANCIENT TRIGONOMETRY

AUTOR	**Ondřej Chwiedziuk**
ŠKOLA	**Gymnázium F. X. Šaldy, Partyzánská 530/3, příspěvková organizace**
KRAJ	**Liberecký**
ŠKOLITEL	**Zdeněk Halas, DiS., Ph.D., Katedra didaktiky matematiky**
OBOR	**1. Matematika a statistika**

Liberec 2021

Prohlášení

Prohlašuji, že svou práci na téma *Goniometrie v antice* jsem vypracoval/a samostatně pod vedením Zdeňka Halase, DiS., Ph.D. a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Dále prohlašuji, že tištěná i elektronická verze práce SOČ jsou shodné a nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a změně některých zákonů (autorský zákon) v platném změní.

V Liberci dne: ________________ ____________________

Ondřej Chwiedziuk

Poděkování

Poděkování bych chtěl především věnovat svému vedoucímu, Zdeňku Halasovi, DiS., Ph.D., který mě touto prací provedl a pomohl mi s praktickými problémy i s nejasnostmi, na které jsem během psaní narazil. Dále bych chtěl poděkovat studentům Danielu Břízovi z Filosofické Fakulty a Jaroslavu Hořákovi z Matematicko-Fyzikální Fakulty UK, kteří mi pomohli provést korekturu.

Tato práce byla provedena ve spolupráci s Matematicko-Fyzikální Fakultou Univerzity Karlovy.

Anotace

Tato práce SOČ se zabývá pohledem antických matematiků na goniometrické funkce. Cílem práce je zanalyzovat historický text zabývající se těmito funkcemi, přeložit ho do řeči moderní matematiky a aplikovat poznatky při rekonstrukci tabulek hodnot. K tomuto účelu byl použit programovací jazyk Python. V první kapitole se zadefinují základní goniometrické funkce. Ve druhé je vysvětlen historický důvod vzniku oboru, odvozeny fundamentální vztahy a vysvětlena metoda výpočtu konkrétních hodnot funkce. Třetí kapitola rozšiřuje pohled na téma a poskytuje motivaci věnovat se mu více do hloubky. Závěrečná kapitola je doplněna o přehled užitečných vzorců a definic. Práce je doplněna o mnoho historických faktů, které uvádějí čtenáře do historického kontextu doby vzniku antických děl a usnadňuje mu pochopení podstaty tématu.

Klíčová slova

antika; goniometrie; Klaudios Ptolemaios; matematika

Annotation

This SOC thesis deals with the view of ancient mathematicians on trigonometric functions. The aim is to analyze the historical text dealing with these features, translate it into a language of modern mathematics and apply knowledge in reconstruction of value tables. The Python programming language was used for this purpose. In the first chapter the basic trigonometric functions are defined. In the second one, the historical reason for the origin of the field is explained, the fundamental relations are derived and the method of calculating specific values of the function is explained. The third chapter broadens the view of the topic and provides motivation to pay more attention to it in depth. The final chapter is supplemented with an overview of useful formulas and definitions. The work is supplemented by many historical facts, which introduce the reader to the historical context of the time of the creation of ancient works and makes it easier for him to understand the essence of the topic.

Keywords

antiquity; trigonometry; Klaudios Ptolemaios; mathematics

Obsah

Úvod

Dnešní matematika, ač postavena na odkazu antických myslitelů, přistupuje ke goniometrii značně odlišně, např. definicí pomocí řešení funkcionálních rovnic či nekonečných řad. Ve starověkém Řecku byla goniometrie chápána jako pomocná věda v astronomii, neboť poskytovala způsoby, jak zjistit vzdálenost vesmírného tělesa od Země či jeho trajektorii, po které se pohybovalo. Pro potřeby astronomů začaly vznikat tabulky s vypsanými hodnotami tehdejších goniometrických funkcí, ovšem pro dnešní čtenáře jsou značně nepřehledné a nesrozumitelné, nejen pro použití sexagesimální (šedesátkové) soustavy, ale i pro jiný zápis čísel, neboť arabské číslice se v Evropě začínají objevovat až ve 13. století zásluhou italského matematika Fibonacciho. Proto jsem si stanovil cíl přiblížit tehdejší postupy výpočtu hodnot, jež aplikuji na dnešních základních funkcích, tj. sinus a kosinus.

V první části se pokusím čtenáře seznámit s goniometrickými funkcemi. Zkusím je zadefinovat naivním středoškolským způsobem a ukázat, jak s nimi lze pracovat. Měl by to být takový úvod do problematiky goniometrie, především pro ty, kdo znají sinus a kosinus jen jako "tu funkci na kalkulačce." V případě, že ovládáte matematiku na vyšší úrovni, věřím, že tuto kapitolu můžete přeskočit.

Dále se pokusím uvést čtenáře do historického kontextu, za jakých okolností se tehdejší matematika rozvíjela. Dnes připadá matematikům samozřejmé, že se každé tvrzení musí dokázat či že se na začátku textu uvádí definice pojmů. V antice ale měla matematika spoustu úskalí. Tehdy se nepsalo na papír, jenž byl vynalezen v Číně, a jeho používání v Evropě je datováno až kolem 13. století, ale na papyrus, jehož hlavní nevýhodou byla nutnost celý text jednou za čas opsat, protože papyrus se snadno opotřebovával (např. rozvíjením svitku, byl totiž z vysoušených proužků šáchoru); mnohem dražší volbou byl pergamen, který se z finančních důvodů nevyužíval až do středověku. Svitky byly ukládány v knihovnách, jako příklad může sloužit Alexandrijská knihovna, svého času největší instituce na tehdy známém světě. Ta naneštěstí několikrát vyhořela, ať již při pobytu Caesara v Alexandrii, či poté během arabské nadvlády. Filosofové také při výpočtech a náčrtech používali písek, do něhož kreslili své obrazce, kde nelze vytvořit přesné nákresy, nýbrž pouze přibližné. Tato skutečnost vedla matematiky k myšlence vytvoření důkazu, aby podložili své tvrzení, i když nevytvoří přesný nákres. Například dnes říkáme Pythagorově větě po Pythagorovi, ne z důvodu, že by ji vymyslel, ale protože jako první obecně dokázal její platnost. Sám Pythagorás měl čísla v úctě, ovšem jen čísla racionální, čísla iracionální, např. odmocninu ze dvou, odmítal a myslil si, že porušují řád, neboť nelze zapsat zlomkem jejich přesnou velikost. Většina hodnot goniometrických funkcí patří mezi iracionální čísla, kterými se právě z toho důvodu Pythagorejci nezabývali a popírali jejich existenci, čímž se vracíme zpět k tématu této práce, protože matematici pozdějších generací se snažili vypsat alespoň přibližné hodnoty těchto funkcí na papyrus a nezabývali se, zda je to číslo krásné. Tyto tabulky, nebo alespoň jejich fragmenty, v přepisech vydržely až do dnešních dnů.

Z výše vypsaných důvodů třetí část práce spočívá ve vytvoření současných tabulek, které budou spočteny metodami tehdejších matematiků za pomocí programu napsaném v jazyce Python, ale budou tam hodnoty dnešních moderních goniometrických funkcí. Nejprve si spočítám přibližnou hodnotu sinu jednoho stupně, a následně vyplním tabulku hodnotami s krokem o velikosti půl stupně pro funkce sinus a kosinus. Dále vytvořím stručný přehled goniometrických funkcí, i těch dnes již nepoužívaných, a vztahů mezi nimi, především proto, aby byly vidět vedle sebe, což může poodkrýt různé, doposud čtenářem nepoznané, souvislosti.

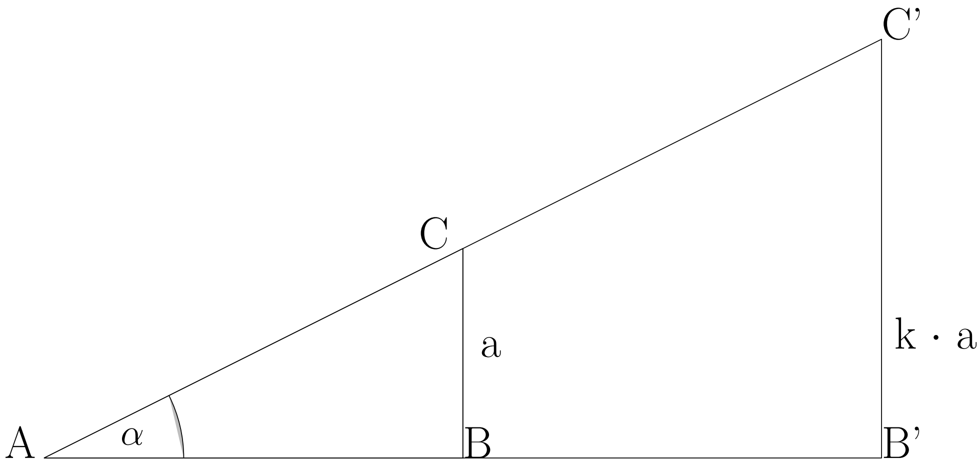
V práci budu klást na interpretaci původních pramenů v řeči moderní matematiky, přičemž se budu snažit co nejvěrněji držet historického postupu. Věřím, že čtenář porozumí nejen goniometrickým funkcím, ale i historickému kontextu.

1 Goniometrické funkce

V této kapitole se věnuji základním funkcím sinus a kosinus, dnes nejužívanějším goniometrickým funkcím. V průběhu studia se můžete postupně seznámit s několika různými definicemi a každá poskytuje trochu jiný pohled na jejich vlastnosti.

1.1 Pravoúhlý trojúhelník

S první definicí goniometrických funkcí jste se setkali již na základní škole. Ta je vyjadřovala jako vztah mezi poměrem stran v pravoúhlém trojúhelníku a jeho úhly. Napřed si ale ukažme, že pokud nezměníme poměry stran trojúhelníku, zůstanou zachovány i jeho úhly, nehledě na to, zda jeho strana měří pár centimetrů, či je velikostí shodná se vzdáleností Slunce od Země.



Obrázek 1.1: Trojúhelník

Jestliže je trojúhelník $A'B'C'$ k-násobkem trojúhelníku ABC, tj. poměr příslušných stran je k, pak trojúhelníky jsou si podobné. Podívejme se na obrázek výše. Trojúhelníky jsou posunuté tak, aby se překrývaly. Vzhledem k tomu, že jsou strany přilehlé k úhlu α pouze naškálované, ale svírají stále stejný úhel. Můžeme provést cyklickou záměnu. Z toho vyplývá, že pokud jsou trojúhelníky podobné, pak mají stejné úhly.

Jak toho využít? Představme si funkci, kam vložíme velikost úhlu, aby nám následně vrátila vybraný poměr stran trojúhelníku. Zatím nevíme, jak tyto funkce fungují, ale to nám je prozatím jedno, k tomu se dostaneme v pozdější části práce. Nyní to bude pro nás jen taková kouzelná krabička.

$$\sin\alpha := \frac{\textit{protilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}} \tag{1.1}$$

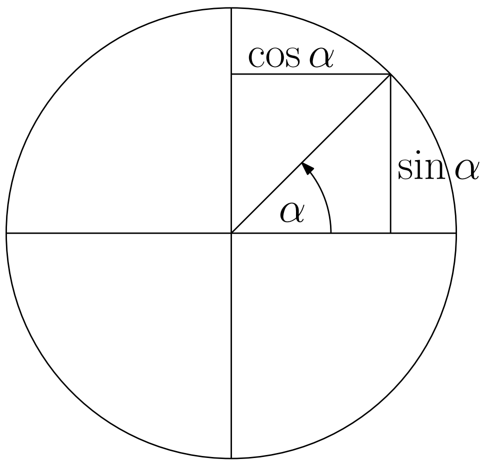
$$\cos\alpha := \frac{\textit{přilehlá odvěsna}}{\textit{přepona}} \tag{1.2}$$

Nyní něco málo k historii. Poprvé se tyto definice objevily v 16. století, když je zavedl ve svém díle *Canon doctrinae trigulorum* Georg Joachim Rhaeticus[1] (1514–1574). Rhaeticus se narodil Georgu Iserinovi, městkému lékaři ve Feldkirchu, který ho vyučoval v matematice do doby, než byl v roce 1528 popraven pro čarodějnictví. Své příjmení Rhaeticus si později k jménu přidal sám, vychází z názvu římské provincie Raetia, která se rozkládala mezi alpskými průsmyky a zahrnovala dnešní Švýcarsko spolu se západní částí Rakouska. Roku 1533 zahájil studium na universitě ve Wittenburgu, kde se později stal i učitelem. 1539 se vydal k Mikuláši Koperníkovi, u kterého strávil dva roky a po návratu do Wittenbergu vydal Koperníkovo dílo *De Revolutionibus*, k němuž připojil své tabulky sinu a kosinu. Roku 1551 byl obviněn z homosexuality a byl nucen hledat azyl v Praze, kde se věnoval studiu medicíny, ač na matematiku nezanevřel, a právě zde sepsal své tabulky všech tehdy používaných goniometrických funkcí, mezi něž patří sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans. Těsně před svou smrtí přijal k sobě mladého studenta Lucia Valentina Othona, jenž po jeho smrti tyto tabulky dokončil a vydal.

[1] University of St. Andrews – [UST1]

1.2 Jednotková kružnice

Poté jste se jistě na střední škole seznámili s jednotkovou kružnicí a definicí goniometrických funkcí jakožto závislosti délky poloviny tětivy na velikosti orientovaného úhlu. Takto vznikly i goniometrické funkce v antice, kde místo jednotkové kružnice byla používána šedesátková[2]. Samotná kružnice byla rozdělena na 360 dílů, dnes se pro ně používá označení stupeň. Vznik šedesátkové soustavy se datuje už do dob starých Sumerů před pěti tisíci lety. Její použití se objevuje i později v Babylonu či Egyptě, kde ji přejali staří Řekové. Důvod jejího použití není přesně znám, ale je možné, že číslo 60 bylo zvoleno, neboť mělo mnoho dělitelů, mezi nimiž byla čísla 12 a 30, která měla velký význam při sestavování kalendáře. Taktéž se dalo velmi snadno krátit, což bylo užitečné, jelikož se tehdy řádová čárka nepoužívala a její užití nahrazovaly zlomky. Dnes se šedesátková soustava užívá k určování času a velikosti úhlů ve stupních, ačkoliv se dnes využívají i jiné míry, třeba oblouková míra, tedy délka oblouku v jednotkové kružnici. Vznik obloukové míry je připisován matematiku Rogeru Coteovi, ač její obdobu používal už arabský matematik Al-Káší. Existují i exotičtější jednotky, např. dělostřelecké dílce, používané především v armádě.



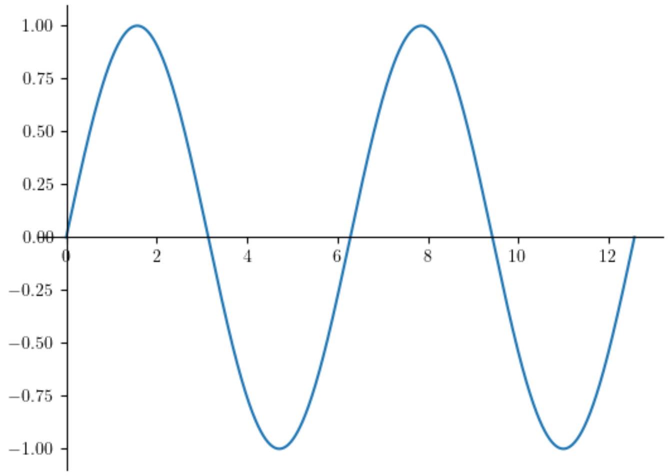
Obrázek 1.2: Jednotková kružnice

[2] [UST2]

Jednotková kružnice umožnila vypočítat i hodnoty pro velikosti, které nejsou v intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$, tudíž se stalo počítání s těmito funkcemi praktičtější. Je libo úhel -3π? Klidně. Velikost úhlu je orientována proti směru hodinových ručiček, tudíž záporná velikost značí, že úhel je orientován po směru hodinových ručiček. Zároveň si můžeme povšimnout periodicity. Když je úhel větší než 2π, pak se rameno úhlu vrací na pozici, na které byl, když jsme s ním začali otáčet.

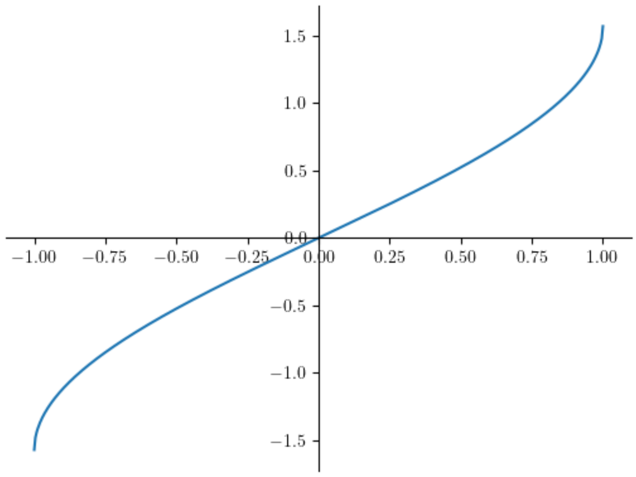
1.3 Sinus a kosinus

Nyní se podívejme na sinus, jeho různé důležité vlastnosti, které nám ho lépe pomohou pochopit, a nějakou historii.



Obrázek 1.3: Sinus

Graf nazýváme **sinusoida**. Při pohledu na graf funkce si povšimneme periody o velikosti 2π. Také si povšimneme, že je to funkce lichá, tedy $\sin x = -\sin(-x)$. Je to funkce omezená shora i zdola. Vyplývá to přímo z definice pomocí jednotkové kružnice. Inverzní funkci nazýváme **arkus sinus**, $\arcsin x$, jenže je tu drobný problém, totiž sinus není prostá funkce. Abychom mohli arkus sinus definovat, tak je obor hodnot omezen na interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Obrázek 1.4: Arkus sinus

Druhou nejpoužívanější funkcí je kosinus. Nejprve základní popis jeho vlastností. Graf nazýváme kosinusoida, což je ve skutečnosti posunutá sinusoida o $\frac{\pi}{2}$. Když se podíváte na jednotkovou kružnici, jistě si povšimnete podobností mezi sinem a kosinem. Mezi základní vlastnosti patří sudost funkce, omezenost shora i zdola a periodicita. Inverzní funkce je **arkus kosinus**, řešená je podobně jako arkus sinus, jen je její obor hodnot omezen na interval $[0, \pi]$.

Sinus byl poprvé použit indickými matematiky v Guptské říši na přelomu 5. a 6. stol. n. l.[3] spolu s funkcí sinus versus. Jeho spočítané hodnoty byly nalezeny v básni *Áryabhatíya*, první dochované tabulky funkce sinus. Jejich poznatky byly, spolu s číslicemi, přejaty arabskými matematiky, např. Al-Chorezmím, který sestavil tabulky šesti dodnes nejpoužívanějších funkcí, sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans a kosekans. První doložené užití

[3] [UST2]

těchto funkcí v Evropě bylo ve Francii v 16. století matematikem Albertem Girardem. Od něj vedl již malý kousek k již zmíněnému Rhaeticovi, který sestavil příslušné tabulky.

Samotný původ jména sinus můžeme hledat v indickém slově *jya*[4]. Arabové poté toto jméno přijali v podobě *jiba*, které nemělo do té doby žádný význam. Postupem času bylo původní slovo zkomoleno do podoby *jaib*, v překladu složit. Evropští matematici, když se s tímhle jménem potkali, si ho přeložili do latiny, což bylo již dnes každému známé slovo *sinus*.

Kosinus je funkce velmi podobná sinu a mají spolu společné více, než se zdá. Když se podíváme na jednotkovou kružnici, povšimneme si, že můžeme využít Pythagorovu větu:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.3}$$

Toto je náš první vztah mezi sinem a kosinem[5]. Zatím jsme dokázali všechno odvodit jen pohledem na jednotkovou kružnici. Nyní je na čase ji opustit a po vzoru starověkých Řeků prozkoumat její vlastnosti i jiným způsobem.

[4] [UST2]

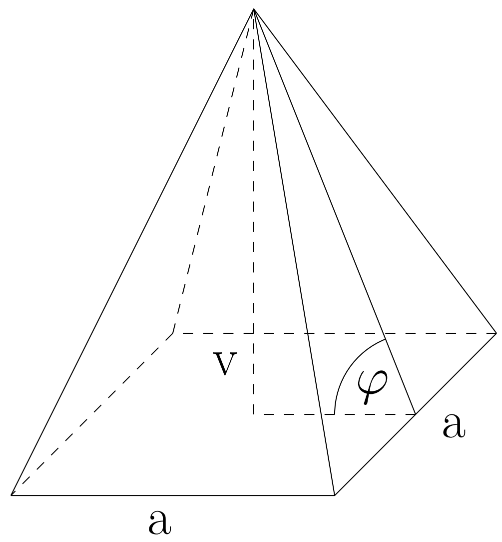
[5] Další jsou v tabulkách základních vztahů ve čtvrté kapitole

2 Tětivy ve starověku

2.1 Počátky goniometrie

2.1.1 Egyptská říše

První náznaky goniometrie jsou viděny již ve starověkém Egyptě, konkrétně v Rhindském papyru. Jeho vznik se datuje přibližně do období Střední říše, zhruba kolem roku 1650 př. n. l. a v roce 1858 byl zakoupen skotským právníkem Henrym Rhindem v Egyptě, tou dobou pod nadvládou Osmanské říše. Poté byl umístěn do Britského národního musea, kde se nachází dodnes. Papyrus není nějakou konkrétní teoretickou prací, nýbrž řešení 84 praktických problémů z oblasti architektury a správy země, mezi než patří i otázka, jaký sklon má mít pyramida. Tento sklon egypťané nazývají *seqed* a definovali ho jako poměr poloviny délky hrany pyramidy a její výšky. Dnešním ekvivalentem je kotangens.



Obrázek 2.1: Pyramida

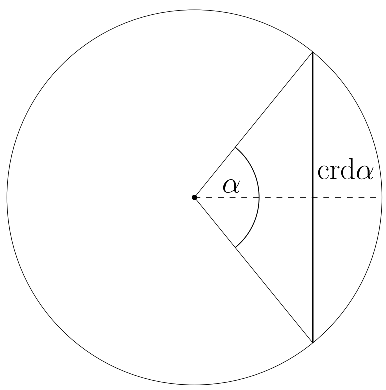
$$\text{seqed}\ \varphi = \text{cotg}\ \varphi = \frac{\frac{a}{2}}{v} \tag{2.1}$$

Staroegyptské tabulky v rhindském papyru jsou vůbec první dochovaný pokus zapsat hodnoty goniometrických funkcí. O těchto časech se mluví jako o proto-goniometrickém období. Překlad tabulek můžete nalézt v knize The Rhind Mathematical Papyrus[1]. Tabulky byly v šedesátkové soustavě a racionální čísla byla zapsána pomocí kmenových zlomků, což jsou zlomky se stejným čitatelem (zpravidla 1), ale různým jmenovatelem. Jejich součtem se dá napsat libovolné racionální číslo. Pro ilustraci, zápis čísla $\frac{2}{3}$ můžeme zapsat jako $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$.

2.1.2 Starověké Řecko

Po Egypťanech se (nejen) goniometrii věnovali Řekové. Byli to první matematici, kteří se věnovali matematice samotné, zakládali si na důkazech svých tvrzení s důrazem na obecnost, oproti předcházejícím civilizacím, které v matematice spatřovaly především nástroj k řešení praktických úloh.

Staří Řekové si všimli, že ke každé tětivě existuje příslušný středový úhel. Funkci, která úhlu přiřazuje délku této tětivy, nazýváme *Chord*, značíme crd α.



Obrázek 2.2: Chord

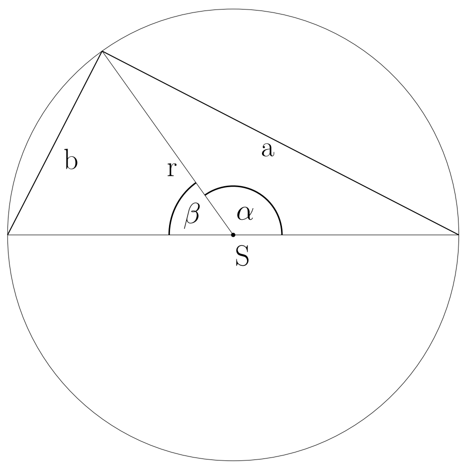
[1] odkaz na pdf viz [RHP2]

Co se týče vztahu k sinu, podíváme se na obrázek výše. Středový úhel α je dvojnásobný oproti úhlu, který se používá v argumentu sinu. Dále nám vrátí jen polovinu délky dané tětivy. Z toho vyplývá, že crd $\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Jenže to stále není správně. Jak jsem výše uvedl, Řekové používali šedesátkovou kružnici, nikoli jednotkovou, tudíž vhodný je následující vztah.

$$\text{crd } \alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2}; r = 60 \tag{2.2}$$

Hipparchos, řecký matematik a filosof, jako první sestavil tabulky hodnot této funkce. Následně je využil k výpočtu vzdálenosti Země od Měsíce a Slunce. Bohužel jeho dílo se nedochovalo a víme o něm jenom zprostředkovaně, když se o něm v jednom ze svých komentářů k Ptolemaiovu Almagestu zmínil Theón z Alexandrie, matematik žijící na konci 4. století za vlády císaře Theodosia.

Pokud bychom chtěli nějak chord využívat ve výpočtech, jistě by byly užitečné i jisté vztahy. Hipparchos jeden takový odvodil z Pythagorovy věty a z Thalétovy kružnice, což zde názorně ukážu:



Obrázek 2.3: Odvození vzorce

Ze znalosti Thalétovy kružnice víme, že všechny úhly nad průměrem jsou pravé. Pythagorova věta říká, že součet druhých mocnin odvěsen se rovná druhé mocnině přepony. Užitím těchto dvou vět vyplývá, že $a^2 + b^2 = 4r^2$.

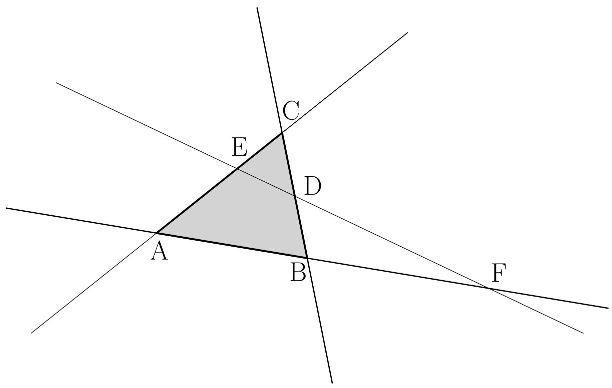
Nyní za a, b dosadíme chord. $\text{crd}^2\ \alpha + \text{crd}^2\ \beta = 4r^2$. Když za β dosadíme $180° - \alpha$, dostáváme:

$$\text{crd}^2\ \alpha + \text{crd}^2\ (180° - \alpha) = 4r^2 \tag{2.3}$$

Tento vztah je vlastně takovou obdobou k (1.3).

Dalším matematikem, který navázal na Hipparchovu práci, byl Meneláos. O jeho životě toho není příliš známo. Klaudios Ptolemaios ve svých textech zmínil, že kolem roku 98 n. l. působil v Římě. Theón z Alexandrie ve svých textech uvedl, že napsal šestidílnou knihu[2] o úhlech, bohužel se dodnes nic nedochovalo. Dále napsal dílo *Sphaerica*[3], v jehož prvním díle existuje první definice sférického trojúhelníku. Sférický trojúhelník je takový trojúhelník, který se nachází na kulové ploše. Taktéž je občas nazýván Eulerovým trojúhelníkem. V těchto trojúhelnících neplatí Eukleidův 5. postulát, tj. že součet vnitřních úhlů je roven 180°. Ve druhém díle se věnoval pouze astronomii. Pro nás je nejdůležitější díl třetí.

Ve třetí knize formuloval tzv. *Meneláovu větu*, která vyjadřuje rovnost mezi poměry stran v trojúhelníku, pokud jej protíná nějaká přímka.



Obrázek 2.4: Meneláos

[2]Knihou je zde myšlen jeden svitek, který měl jen omezenou délku. Tudíž se zde myslí jedno dílo, které je napsané na 6 svitcích.

[3]V řečtině $\Sigma\varphi\alpha\iota\rho\iota\kappa\alpha$.

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = -1 \tag{2.4}$$

V tomto tvaru je důležité, že úsečky jsou orientované, což jim přidává i záporný smysl délky.

Důkaz vypadá následovně: nejprve dokážeme, že obě strany budou mít stejné znaménko. V případě, že přímka neprotíná samotný trojúhelník ABC, pak všechny průsečíky leží mimo trojúhelník, z čehož vyplývá, že všechny tři poměry jsou záporné. V případě, že by přímka protínala nějaký z bodů A, B, C, pak bychom dělili nulou a věta postrádá smysl. V případě protnutí trojúhelníku, aniž bychom protli nějaký z vrcholů, leží dva z průsečíků v trojúhelníku, z čehož vyplývá, že je opět levá strana záporná.

Nyní spustíme kolmice z vrcholů trojúhelníku na přímku FE. Povšimněme si, že je zde nyní několik podobných trojúhelníků. Tohoto využijme a nahraďme poměry úseček délkami kolmic. Jak ve jmenovateli, tak v čitateli nám vychází stejný výraz, tj. 1. Toto řešení je v absolutní hodnotě.

Třetí část spočívá v důkazu, že všechny tři body D, E, F musí ležet na jedné přímce. Tato část je ovšem zřejmá, když si zvolíme nějaký bod X, který nenáleží přímce a zároveň pro něj platí Meneláova věta, tak dříve nebo později dojdeme ke sporu.

Proč jsme se tím zabývali? Meneláos tuto větu formuloval pro sférický trojúhelník. Výše uvedený trojúhelník promítl na kouli, a tím větu (2.4) transformoval do následujícího tvaru:

$$\frac{\text{crd } AF}{\text{crd } FB} \times \frac{\text{crd } BD}{\text{crd } DC} \times \frac{\text{crd } CE}{\text{crd } EA} = -1 \tag{2.5}$$

Když větu (2.4) přepíšeme do funkce sinus pomocí (2.2), tak by měla věta následující tvar:

$$\frac{\sin AF}{\sin FB} \times \frac{\sin BD}{\sin DC} \times \frac{\sin CE}{\sin EA} = -1 \tag{2.6}$$

2.2 Klaudios Ptolemaios

Doteď jsme se zabývali pouze nějakou základní charakteristikou funkce chord. Ale k čemu nám to je, když nedokážeme určit funkční hodnoty pro daný argument? Právě těmito výpočty se mimo jiné zabýval Klaudios Ptolemaios ve svém díle Almagest. Nepopírám, že nějaké tabulky existovali již před ním, ale právě jeho tabulky jsou první dochované tabulky tohoto typu.

2.2.1 Životopis

Klaudia můžeme považovat za nejvlivnějšího antického astronoma. Jeho *Almagest*[4] je plně srovnatelný s Eukleidovými *Základy.* Není známo jeho datum narození, či úmrtí, jediné, co dokážeme určit, je jeho působení v Alexandrii podle měření, která prováděl od 26. března 127 do 2. února 141 n. l. To je tak asi všechno, co víme o jeho životě. Na základě rozboru jména můžeme dojít k následujícím poznatkům: jméno *Ptolemaios* naznačuje, že jeho rodina původně pocházela z Řecka. Naopak *Claudius* naznačuje, že byl římským občanem, s tím, že jeho předek dostal římské občanství přibližně v době vlády Julsko-Klaudijské dynastie.
Co se týče jeho nejdůležitějšího díla *Almagest*, pojmenování pochází z arabského překladu původního názvu *Matematické pojednání.* Tato kniha se skládá ze 13 svitků a zpracovává matematickou teorii pohybu nebeských těles, tj. Slunce, Měsíce a planet.

Na počátku knihy obhajuje geocentrický model Sluneční soustavy. První 2 knihy jsou čistě matematickou teorií, kde popisuje sférickou trigonometrii, která bude rozebrána na následujících stranách této práce. Třetí kniha se zabývá pohybem Slunce, čtvrtá a pátá pohybem Měsíce, kniha šestá spojuje poznatky předcházejících kapitol na vysvětlení zatmění. Další 2 knihy se zabývají pohybem hvězd a zbytek pohybem planet.

Další Ptolemaiova díla, např. *Příruční tabulky*, *Planetární Hypotézy*, *Planisphaerium*, či *Analéma* doplňují samotný Almagest. Poté napsal knihu

[4] Jedná se o arabský překlad, originální text nese název $M\epsilon\gamma\alpha\lambda\eta\ o\upsilon\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$

Tetrabiblos, která se zabývá astrologií a snaží se v ní vysvětlit působení hvězd na pozemské dění pomocí fyziky, ovšem je to pořád astrologie. *Geografie* je Ptolemaiův pokus zmapovat celý tehdy známý svět, užitím zeměpisné délky a šířky. Bohužel jsou jeho mapy nepřesné, především mimo Římskou říši, neboť neměl dostatek informací mimo římské hranice. *Optika* se dochovala pouze ve zlomcích, ovšem pojednává o světlu, barvách, odrazu i lomu světla. Poslední známé dílo *Harmonika* se zabývá hudebními intervaly.

2.2.2 Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Než začneme počítat, je potřeba si blíže popsat šedesátkovou soustavu, ve které počítal Ptolemaios a kterou budeme částečně používat i my. Samotná soustava je spíše pozůstatkem po Mezopotámii. Vezměme si šedesátkovou kružnici. Délka jejího poloměru má 60 dílů, zatímco délka celého oblouku je 360°, jako dnes. Jelikož Řekové nepoužívali desetinnou (ani jinou) čárku, jsou jednotlivé řády odděleny mezerou, např. číslo 7,5 bychom napsali jako 7 30. Obecněji, když písmena budou číslice:

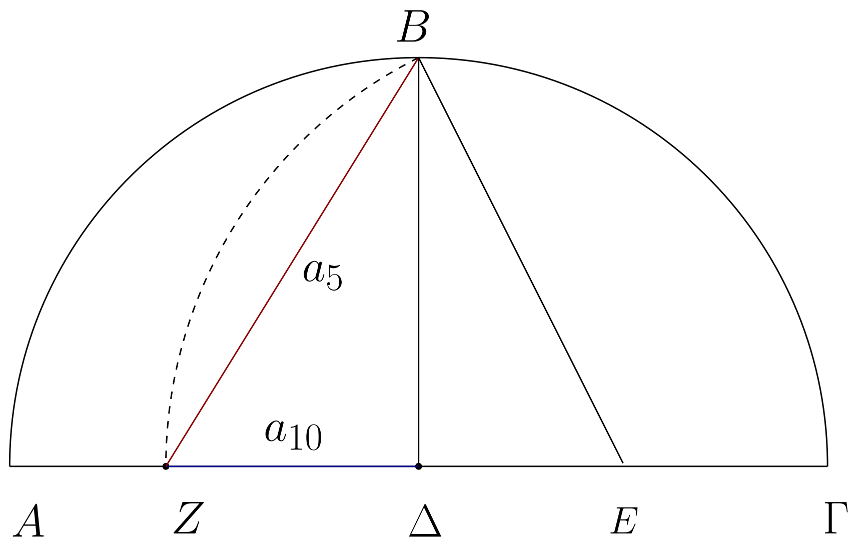
$$A\ B'\ C'' = A + \frac{B}{60} + \frac{C}{60^2}$$

Po seznámení s řeckým formalismem je potřeba vytyčit cíl této kapitoly. Pokusím se zde, podle Ptolemaiova Almagestu, odvodit vzorec na výpočet chordu/sinu 1°. Ptolemaios byl ve svém díle velice pečlivý, tudíž, ač svoji práci považuji spíše za překladatelskou, se budu snažit vysvětlit kroky jeho postupu tak, aby byly srozumitelné.

Nyní budeme postupovat striktně podle Ptolemaiova popisu a sestrojíme si strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku. Ptolemaios píše[5] *"Mějme nejdříve půlkruh $AB\Gamma$ o průměru $A\Delta\Gamma$ a středu Δ. Veďme z Δ přímou ΔB kolmou k $A\Gamma$ napůl v bodě E. Veďme spojnici EB, mějme EZ stejně velkou jako EB. Tvrdím, že $Z\Delta$ je stranou pravidelného desetiúhelníku a BZ pětiúhelníku."*

[5] viz [Euc1]

Abychom pochopili, co právě napsal, bude stěžejní si udělat nákres.



Obrázek 2.5: Pětiúhelník a desetiúhelník

Ptolemaios tvrdí, že platí následující rovnosti. Abychom viděli, že to platí, budeme délky stran zapisovat také jako a_{10} a r, kde r je poloměr kruhu.

$$\Gamma Z \cdot Z\Delta + E\Delta^2 = EZ^2$$

$$(a_{10} + r)a_{10} + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(a_{10} + \frac{r}{2}\right)^2$$

Všimněme si, že je to pouhý roznásobený tvar druhé mocniny dvojčlenu. Víme také, že $EB = EZ$. Poté také napíšeme Pythagorovu větu pro trojúhelník $B\Delta E$:

$$E\Delta^2 + B\Delta^2 = EZ^2$$

$$\Gamma Z \cdot Z\Delta + E\Delta^2 = E\Delta^2 + B\Delta^2$$

$$\Gamma Z \cdot Z\Delta = B\Delta^2 = \Gamma\Delta^2$$

$$(r + a_{10})a_{10} = r^2$$

$$a_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2} = r\phi \tag{2.7}$$

Všimněme si, že poměr ϕ mezi r a a_{10} je zlatý řez[6]. Ptolemaios tvrdí, že jelikož se délka pravidelného šestiúhelníku a desetiúhelníku dělí v poměru zlatého řezu a $\Gamma\Delta$ je stejně velká jako strana šestiúhelníku, který by byl vepsán do kružnice $AB\Gamma$, pak a_{10} musí být stranou desetiúhelníku vepsaného do stejné kružnice. Z toho dokážeme, že a_5 je délka pětiúhelníku.

$$ZB^2 = Z\Delta^2 + \Gamma\Delta^2 = Z\Delta^2 + B\Delta^2$$

$$a_5 = \left(r\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + r^2$$

$$a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} \tag{2.8}$$

Ptolemaios také tvrdí, že součet druhých mocnin stran desetiúhelníku a šestiúhelníku se rovnají mocnině strany pětiúhelníku, pak, vzhledem k rovnosti výše, je a_5 stranou pětiúhelníku. V těchto tvrzeních vychází z Eukleidových Základů.

Důkazy máme za sebou a je čas pokročit k počítání. Víme, že straně pětiúhelníku odpovídá středový úhel 72° a poloměr $r = 60$. Z toho vyplývá, že:

$$\text{crd } 72^\circ = 70\ 32'\ 3''$$

Analogicky pro středový úhel k desetiúhelníku, respektive k šestiúhelníku a ke čtverci platí, že:

$$\text{crd } 36^\circ = 37\ 4'\ 55''$$

[6]Viz Luboš Motl v knize Pěstujeme Lineární Algebru [PLA]

$$\text{crd } 60° = 60$$

$$\text{crd } 90° = 84\ 51'\ 10''$$

Myslím, že je výpočet délky tětivy pro úhel 60°, respektive 90°, je v porovnání s pětiúhelníkem a desetiúhelníkem triviální a není třeba ho uvádět. Poté Ptolemaios odvodí, s pomocí vzorce u Hipparcha (2.3), velikosti úhlů doplňkových do 180°. Tyto úhly pro nás prozatím nejsou příliš důležité.

Pokud bychom chtěli hodnoty pro *sinus* úhlů, budeme postupovat podobně, poloměr bude 1, počítaný úhel poloviční a i vypočtěná hodnota polovinou dané tětivy, příklad:

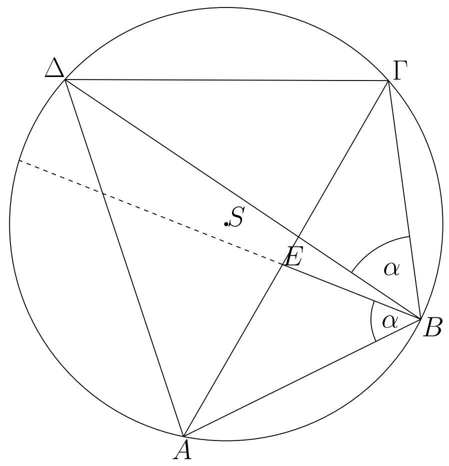
$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

$$\sin 36° = \frac{a_5}{2} = \frac{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}}{2} \doteq 0,5878$$

Tyto dva úhly jsem nevybral náhodně, budeme s nimi později pracovat paralelně k Ptolemaiovu postupu.

2.2.3 Ptolemaiova věta o úhlopříčkách

Přišli jsme k části, o které sám ve svém díle Ptolemaios prohlásil, že se jedná o užitečné lemmátko, ale dnes se považuje za jeden z jeho hlavních přínosů geometrii. Nazývá se Ptolemaiova věta o úhlopříčkách, používá se v mnoha důkazech a moje první setkání s ní přišlo na Matematické Olympiádě.



Obrázek 2.6: Tětivový čtyřúhelník

Na nákresu výše je nakreslen tětivový čtyřúhelník $AB\Gamma\Delta$. Abychom mohli odvodit Ptolemaiovu větu, tak byl přikreslen bod E, pro nějž platí, že leží na úsečce $A\Gamma$ a velikost úhlu ABE je shodný s $\Gamma B\Delta$. Úhel $A\Gamma B$ a úhel $A\Delta B$ jsou obvodové úhly nad AB, tudíž mají stejnou velikost. Zároveň $AB\Delta$ je shodný s $EB\Gamma$, což vychází z toho, jak jsme si definovali polohu bodu E. Všimněme si, že trojúhelníky $AB\Delta$ a $EB\Gamma$ jsou si podobné. Proto platí, že:

$$\frac{B\Gamma}{\Gamma E} = \frac{B\Delta}{\Delta A}$$

$$B\Gamma\ \Delta A = B\Delta\ \Gamma E$$

Analogicky úhel ABE je shodný s $\Gamma B\Delta$ a $BA\Gamma$ s $B\Delta\Gamma$. Z toho vyplývá, že trojúhelník $B\Gamma\Delta$ je podobný s BEA.

$$\frac{AB}{AE} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$$

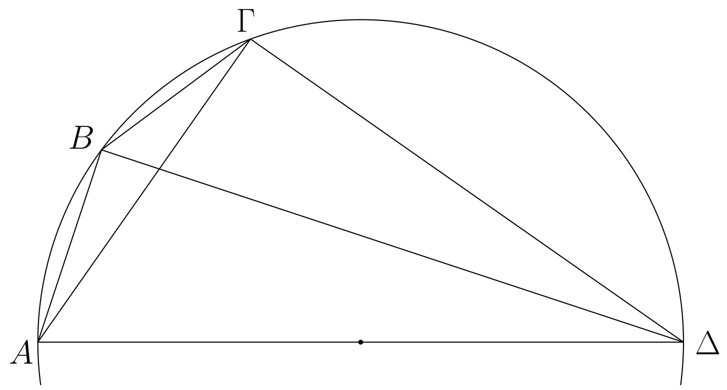
$$AB\ \Gamma\Delta = B\Delta\ AE$$

Pokud sečteme výsledné dvě rovnosti, dostaneme:

$$B\Gamma\ \Delta A + AB\ \Gamma\Delta = B\Delta(\Gamma E + AE)$$

$$B\Gamma\ \Delta A + AB\ \Gamma\Delta = B\Delta\ A\Gamma \tag{2.9}$$

Což je Ptolemaiova věta. Teď by se nám hodilo z ní odvodit něco jako součtový vzorec. Nakresleme takový čtyřúhelník $AB\Gamma\Delta$, který bude mít opsanou kružnici o průměru $A\Delta$. Mějme dané i tětivy AB a $A\Gamma$. Ptolemaios tvrdí, že lze dopočítat i délku tětivy $B\Gamma$. Pojďme si to dokázat.



Obrázek 2.7: Rozdílový vzorec

Nejprve dokresleme spojnice $B\Delta$ a $\Gamma\Delta$. Když využijeme Ptolemaiovu větu (2.9), dostaneme:

$$AB \cdot \Gamma\Delta + A\Delta \cdot B\Gamma = A\Gamma \cdot B\Delta$$

Ze zadání známe AB i $A\Gamma$ a využitím Hipparchova vzorce (2.3) i $B\Delta$ a $\Gamma\Delta$, tudíž nám zbývá pouze obdélník $A\Delta \cdot B\Gamma$, kde ovšem $A\Delta$ je známá. Takže stačí vyjádřit $B\Gamma$. Abychom to vyjádřili úhly, pak crd α odpovídá $A\Gamma$ a crd β odpovídá AB.

$$\text{crd}\ (\alpha - \beta) = \frac{\text{crd}\ \alpha \cdot \text{crd}\ (180^\circ - \beta) - \text{crd}\ \beta \cdot \text{crd}\ (180^\circ - \alpha)}{2r} \tag{2.10}$$

Osobně bych ho spíše pojmenoval rozdílový vzorec. Ten pomocí ekvivalentních úprav upravíme do součtového vzorce, který vypadá následovně[7]

$$\text{crd }(\alpha+\beta)=\frac{\text{crd }\alpha\cdot\text{crd }(180^\circ-\beta)+\text{crd }\beta\cdot\text{crd }(180^\circ-\alpha)}{2r} \tag{2.11}$$

Když jsme vybaveni touto mocnou zbraní, můžeme bez problémů spočítat crd 12°, poté jen s malou úpravou, i jeho polovinu, čtvrtinu atd. Vzorec bude vypadat takhle[8]

$$\text{crd }\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2r^2-r\cdot\text{crd }(180^\circ-\alpha)} \tag{2.12}$$

Popř. kdybychom naopak chtěli dvojnásobek úhlu, vzorec bude vypadat následovně:

$$\text{crd }(2\alpha)=\frac{\text{crd }\alpha\cdot\text{crd }(180^\circ-\alpha)}{r} \tag{2.13}$$

A co sinus a kosinus? Do těchto vzorců můžeme dosadit z převodního vzorce (2.2), přičemž crd $(180^\circ-\alpha)$ je něco jako kosinus. Poté snadno zjistíme, že:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{2.14}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{2.15}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{2.16}$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \tag{2.17}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \tag{2.18}$$

[7]Ptolemaios odvodil tento vzorec zvlášť, nám postačí, když z rozdílového vzorce vyjádříme součet úhlů. Možná je to pracnější, ale přímočařejší cesta.

[8]Ptolemaios tento vzorec odvodil přímo, my si postačíme s rozdílovým vzorcem, kde crd $(\alpha-\beta)=$ crd $\left(\alpha-\frac{\alpha}{2}\right)$ a vyjádříme crd $\frac{\alpha}{2}$.

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{2.19}$$

2.2.4 Metoda výpočtu sinu úhlu 1°

Dokážeme přesně spočítat délku tětivy pro $\frac{3}{2}^\circ$ i pro $\frac{3}{4}^\circ$, ale nikoliv pro 1°. Proč? Abychom tuto hodnotu zjistili, museli bychom provést trisekci úhlu, což Ptolemaios zcela jistě nemohl. V roce 1832 jistý Évariste Galois položil základy teorie grup, kde se zabýval řešitelností algebraických rovnic[9], přičemž dokázal, že trisekci úhlu nelze provést. Ale jak to vyřešit? Nezbývá nám nic jiného, než tuto hodnotu nějak aproximovat.

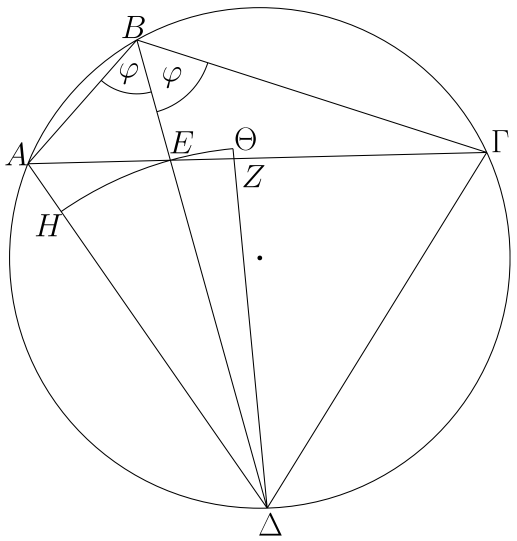
Abychom mohli aproximovat, musíme si nejprve dokázat jednu větu. Totiž, že když $\alpha < \beta$, pak:

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\alpha} > \frac{\text{crd } \beta}{\beta} \tag{2.20}$$

Pokud se zamyslíte, pak dojdete k závěru, že tato nerovnost platí. Jako větší úhel si vemte například 180°. Potom bude tento poměr opravdu malý. Jako další úhel si vemte nějaký nepatrný, potom $\sin\alpha \approx \alpha$, proto jejich poměr se bude limitně blížit jedné, když se α blíží k nule. Teď formální důkaz, opět podle Ptolemaia:

Pro začátek máme předpoklad, že $AB < B\Gamma$. $B\Delta$ je osou úhlu $AB\Gamma$. Když se podíváme, zjistíme, že $A\Delta = \Gamma\Delta$, protože mají stejný obvodový úhel. Taktéž si můžeme povšimnout, že $\Gamma E > AE$ a jsou ve stejném poměru jako naše dvě tětivy. To plyne z našeho předpokladu. Taktéž jsme sestrojili kolmici k $A\Gamma$, která prochází bodem Δ. Jelikož je kolmice v nejkratší vzdálenosti od bodu, pak $A\Delta > E\Delta > Z\Delta$. Když nyní povedeme kružnici se středem v Δ a poloměrem ΔE, pak bude H nutně ležet na úsečce $A\Delta$ a bod Θ na polopřímce ΔZ za bodem Z. Z toho také vyplývá, že obsah $A\Delta E$ je větší než plocha výseče $H\Delta E$. Analogicky plocha výseče $E\Delta\Theta$ je větší než

[9]Důkaz neřešitelnosti trisekce úhlu viz strana 42 v [PLA]



Obrázek 2.8: Aproximace

obsah trojúhelníku $E\Delta Z$. Tyto dvě nerovnosti zakomponujeme do sebe, poté dostaneme tvar:

$$\frac{\Delta EZ}{\Delta EA} < \frac{\Delta E\Theta}{\Delta EH}$$

Jelikož mají trojúhelníky $A\Delta E$ a $E\Delta Z$ stejnou výšku, pak poměr obsahů bude roven poměru jejich základen. Podobný je vztah plochy výseče k úhlu za konstantního poloměru. Proto:

$$\frac{EZ}{EA} < \frac{\angle Z\Delta E}{\angle E\Delta A}$$

Provedeme součtový poměr, tj. že z $A : B$ vyvodíme $(A + B) : B$. Tudíž dostaneme:

$$\frac{ZA}{EA} < \frac{\angle Z\Delta A}{\angle E\Delta A}$$

$$\frac{\Gamma A}{EA} < \frac{\angle \Gamma\Delta A}{\angle E\Delta A}$$

Rozdílový poměr je podobný, akorát z $A : B$ vyvodíme $(A - B) : B$. Potom:

$$\frac{\Gamma E}{EA} < \frac{\angle \Gamma \Delta E}{\angle E \Delta A}$$

Z počátečního předpokladu ale plyne, že:

$$\frac{\Gamma B}{BA} < \frac{\frown \Gamma B}{\frown BA}$$

Což je poměr, který jsme si chtěli odvodit. Je to totiž ekvivalentní k:

$$\frac{\text{crd } \alpha}{\alpha} > \frac{\text{crd } \beta}{\beta}$$

Vezměme si úhly $\frac{3}{2}^\circ$ a $\frac{3}{4}^\circ$. Víme, že:

$$\frac{\text{crd } \frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}} > \frac{\text{crd } 1^\circ}{1}$$

$$\frac{\text{crd } 1^\circ}{1} > \frac{\text{crd } \frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}}$$

Nyní můžeme složit dohromady a vyčíslit, z čehož dostaneme, že:

$$1\ 2'\ 50'' < \text{crd } 1^\circ < 1\ 2'\ 50\frac{2}{3}''$$

Všimněme si, že pokud vezmeme crd $1^\circ = 1\ 2'\ 50''$, dopustíme se odchylky velikosti menší než $\frac{1}{3600}$, což je opravdu velice přesný výsledek a pro sestavení tabulek s chtěnou přesností stačí.

Po dokončení důkazů Ptolemaios sestaví tabulky podle následujícího návodu:

1. Určí hodnotu $\frac{3}{2}^\circ$
2. Určí všechny násobky po 180°
3. Aproximuje velikost 1° a z toho vyvodí $\frac{1}{2}^\circ$
4. Určí hodnoty $n \cdot \frac{3}{2}^\circ \pm \frac{1}{2}^\circ$

My ovšem dnes nepoužíváme crd α, nýbrž sinus a kosinus. Při sestavování našich tabulek ale budeme postupovat stejně. S jeho metodou se dostaneme na krok velikosti $\frac{1}{4}^\circ$ s přesností přibližně na $0,0003$. Tabulky naleznete ve čtvrté kapitole a v Pythonu napsaný skript v příloze.

3 Mocninné řady

Kde tyto poznatky využít? Nejprve se podívejme, proč se vlastně starořečtí mudrci goniometrií zabývali. Její hlavní potenciál viděli v astronomii, jako prostředek pro počítání délky oběhu planet. Pak bychom mohli další využití najít v goniometrii, k dopočítávání úhlů v trojúhelníku. Tento směr už neposkytoval možnost dalšího rozvoje.

V této kapitole bych rád uvedl, jakým směrem se goniometrické funkce budou ubírat v novověku za věku matematických velikánů, jako byli Newton či Leibnitz. Je to pouhý nástin, tato krátká kapitolka by vydala za samostatnou práci. Z toho důvodu se nebudu snažit uvádět nějaké důkazy, vysvětlovat základy analýzy či se zabývat speciálními případy, nýbrž se budu snažit jen vysvětlit, jak tito matematici pracovali s goniometrickými funkcemi. Když matematik vynalezne nový matematický aparát, zkouší, kde všude ho může aplikovat, jako malé dítě.

Vzhledem k tomu, že se v této části práce mění charakter metod, jakým používáme goniometrické funkce, budeme muset změnit i jejich definice. K tomu využijme naše součtové vzorce. Tvrdím, že součtové vzorce jednoznačně určují funkce sinus a kosinus za splnění okrajových podmínek na oboru reálných čísel. Tuto dvojici si nyní definujme jako řešení soustavy funkcionálních rovnic:

$$\begin{aligned} s(x-y) &= s(x)c(y) - c(x)s(y) \\ c(x-y) &= c(x)c(y) + s(x)s(y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Za předpokladu, že:

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1 \tag{3.2}$$

3.1 Arkus sinus

V novověku byly položeny základy matematické analýzy, především Isaacem Newtonem a Gottfriedem Leibnitzem. Zprvu pouze dokázali určit derivaci a integrál polynomů. Ovšem jak spočítat třeba následující integrál?

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Pojďme to nejprve spočítat, jak bychom to počítali dnes. Proveďme substituci:

$$x = \sin a$$

$$dx = \cos a\, da$$

Tudíž výraz upravíme následovně:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 a}} \cos a\, da = \int \frac{1}{\cos a} \cos a\, da =$$

$$= \int 1\, da = a$$

$$[\arcsin x]_0^t = \arcsin t$$

Ale co když neumíme substituci? Potřebovali bychom vyjádřit náš výraz jako polynom. Využijme binomickou větu:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{3.3}$$

Bohužel, náš výraz má exponent $-\frac{1}{2}$, který nenáleží do přirozených čísel. I tak se pokusme binomický rozvoj napsat.

Nejprve zkusme vyřešit problém s kombinačním číslem.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...}{k!(\alpha-k)(\alpha-k-1)...}$$

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-k+1)}{k!} \tag{3.4}$$

Ačkoli se zdálo, že budeme mít problémy s nekonečným součtem, nakonec se nám ten nekonečný "ocásek" pokrátil a zbyl nám konečný počet členů součinu. Tento předpis umožňuje, aby α bylo libovolné komplexní číslo[1]. Nyní postoupíme k binomické větě. Zde se nekonečnému součtu nevyhneme, což by nás ale tolik mrzet nemuselo.

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + ...$$

Teď tento výraz dosaďme do našeho integrálu:

$$\int_0^t (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^t 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-x^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-x^2)^2 + ...\, dx$$

Když nyní dosadíme meze, dostaneme zajímavou rovnost, vypadající následovně:

$$\arcsin t = \left[x + \binom{-\frac{1}{2}}{1}\frac{-x^3}{3} + \binom{-\frac{1}{2}}{2}\frac{x^5}{5} + ...\right]_0^t$$

$$\arcsin t = t + \frac{t^3}{6} + \frac{3t^5}{40} + ...$$

3.2 Sinus - Taylorův polynom

Když pomocí řady dokážeme vyjádřit $\arcsin x$, proč bychom nedokázali vyjádřit také $\sin x$? Obecně bychom mohli napsat, že:

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

Jak zjistit koeficienty? Nejprve položme $x = 0$. Z toho vyplývá, že:

$$\sin 0 = a_0 + 0 = 0$$

[1]Nyní bych doporučil čtenáři za α dosadit nějaké konkrétní hodnoty a něco málo si napočítat.

Dále, který operátor "sebere" konstantu a sníží exponent u všech členů? Derivace! Tudíž zderivujme $\sin x$ podle definice s využitím znalosti součtových vzorců a dvou limit.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \sin x + \frac{\sin h}{h} \cos x \right) = 0 + \cos x = \cos x$$

$$\cos x = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 ...$$

Poté polynom následně proložíme nulou:

$$\cos 0 = a_1 + 0 = 1$$

Nyní bychom mohli pokračovat v derivacích, přičemž zjistíme, že koeficienty, vzhledem k derivacím, jsou faktoriálového charakteru a liché mocniny x jsou nulové. Ve výsledku dojdeme ke vztahu:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!} \tag{3.5}$$

Analogicky bychom dokázali odvodit vzorec pro kosinus.

3.3 Sinus - Newtonův postup

Ovšem Newton dokázal tento vzorec odvodit pouhou úpravou řady pro arkus sinus[2]. Je to o něco složitější postup, než jsme aplikovali my. Nejprve si napsal:

$$\arcsin x = z$$

[2] viz studijní text Princetonské university [PRIC1]

Poté začal aproximací, že $x = z$, s tím, že:

$$x = z + p$$

kde p jsou neznámé členy řady. Nyní za x dosadil do naší řady pro arkus sinus:

$$(z + p) + \frac{(z + p)^3}{6} + \frac{3(z + p)^5}{40} + ... = z$$

Nejprve rozvineme mocniny, vytkneme mocniny p a všechny členy, kde exponent p je větší než 1, zanedbáme. Tímto postupem nám vyjde, že:

$$(\frac{z^3}{6} + \frac{3z^5}{40} + ...) + p(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} + ...) = 0$$

$$p = \frac{-\frac{z^3}{6} - \frac{3z^5}{40} - ...}{1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} + ...}$$

Z čitatele si vezmeme pouze první člen a vše ostatní schováme do písmene q, čímž dostaneme:

$$p = -\frac{z^3}{6} + q$$

Nyní dosadíme zpět k x, čímž dostaneme:

$$x = z - \frac{z^3}{6} + q$$

Pokračováním tohoto postupu s q dojdeme k poznání, že řada, výše odvozená Taylorovým rozvojem, je shodná s řadou, kterou odvodil Newton dříve (asi o 6 let).

3.4 Isaac Newton

Nyní bych rád napsal něco málo o Isaacu Newtonovi[3]. Sir Isaac Newton se narodil 4. ledna 1643 v rodinném panství ve Woolsthorpe. Jeho otec ze-

[3]V této kapitole vycházím z Newtonovy biografie na MacTutor od University St. Andrews [UST3]

mřel ještě před jeho narozením a zanechal mu značné dědictví. On sám byl negramotný a nedokázal se ani podepsat. Jeho matka se dva roky poté znovu oženila. Isaac neměl příliš šťastné dětství. Jeho děda ho neměl příliš rád a ani vztahy s otčímem nebyly nejlepší. Krátce po otčímově smrti Isaac odešel studovat na gymnázium a rozhodl se jít po akademické dráze. Po dokončení školy se rozhodl jít studovat na Cambridge. Zde velmi brzy vystudoval a stal se Lukasiánským profesorem.

Jeho první práce se věnovala optice. Po učinění několika objevů se zde dostal do sporu s Hookem, který tvrdil, že část jeho práce byla od něj zkopírovaná. Následně se věnoval obecné teorii gravitace a formuloval Newtonovy zákony. V roce 1693 se po nervovém zhroucení rozhodl odejít do důchodu a nakonec opustil Cambridge. V roce 1703 byl zvolen prezidentem Vědecké akademie až do jeho smrti 31. března 1727.

Většinu své práce nezveřejňoval, spíše držel v tajnosti, a když už nějakou zveřejnil, často používal nekonstruktivní důkazy, aby tak skryl svůj vlastní postup. Ve sporu s Leibnitzem využíval své pozice, aby ostatní přesvědčil, že hlavní zásluhu na vytvoření kalkulu má on, nikoli Leibnitz.

4 Tabulky

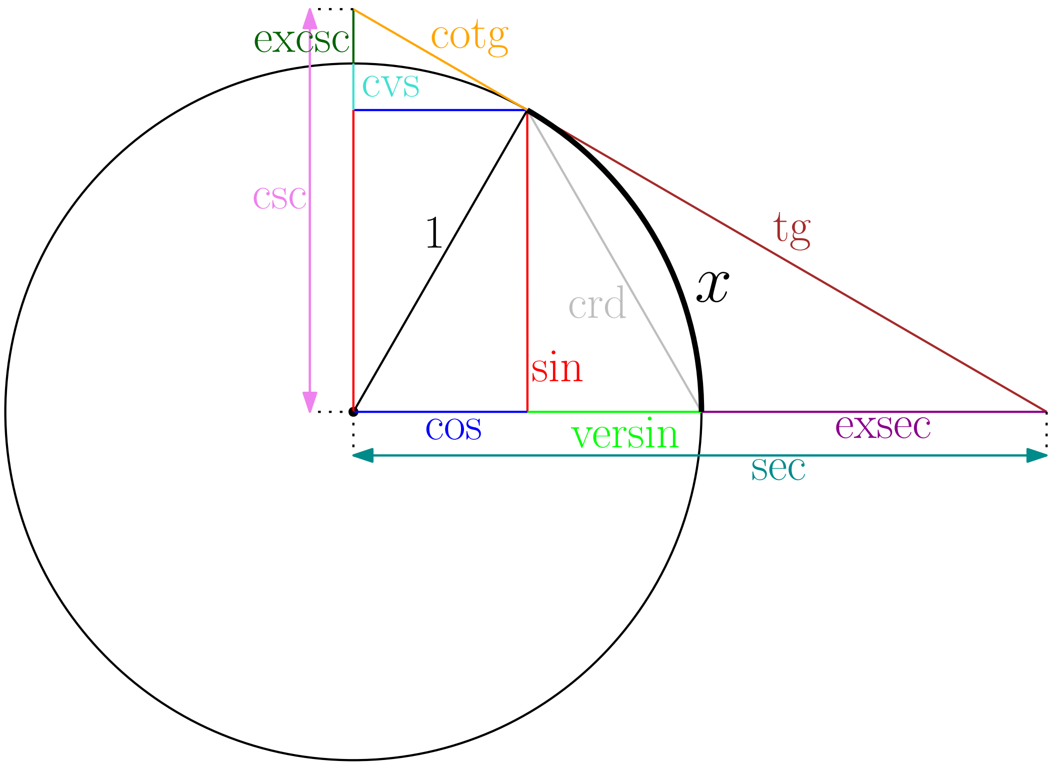
4.1 Přehled goniometrických funkcí

Funkce	Definice	Základní vztah
Sinus	$\sin x = \frac{b}{c}$	$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$
Kosinus	$\cos x = \frac{a}{c}$	$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$
Tangens	$\operatorname{tg} x = \frac{b}{a}$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
Kotangens	$\operatorname{cotg} x = \frac{a}{b}$	$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$
Sekans	$\sec x = \frac{c}{a}$	$\sec x = \frac{1}{\cos x}$
Kosekans	$\csc x = \frac{c}{b}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$
Sinus versus	$\operatorname{versin} x = 1 - \frac{a}{c}$	$\operatorname{versin} x = 1 - \cos x$
Kosinus versus	$\operatorname{vercosin} x = 1 + \frac{a}{c}$	$\operatorname{vercosin} x = 1 + \cos x$
Sinus koversus	$\operatorname{coversin} x = 1 - \frac{b}{c}$	$\operatorname{coversin} x = 1 - \sin x$
Kosinus koversus	$\operatorname{covercosin} x = 1 + \frac{b}{c}$	$\operatorname{covercosin} x = 1 + \sin x$
Semisinus versus	$\operatorname{haversin} x = \frac{1-\frac{a}{c}}{2}$	$\operatorname{haversin} x = \frac{1-\cos x}{2}$
Semikosinus versus	$\operatorname{havercosin} x = \frac{1+\frac{a}{c}}{2}$	$\operatorname{havercosin} x = \frac{1+\cos x}{2}$

Funkce	Definice	Základní vztah
Semisinus koversus	hacoversin $x = \frac{1-\frac{b}{c}}{2}$	hacoversin $x = \frac{1-\sin x}{2}$
Semikosinus koversus	hacovercosin $x = \frac{1+\frac{b}{c}}{2}$	hacovercosin $x = \frac{1+\sin x}{2}$
Exsekans	exsec $x = 1 - \frac{c}{a}$	exsec $x = 1 - \frac{1}{\cos x}$
Exkosekans	excsc $x = 1 - \frac{c}{b}$	excsc $x = 1 - \frac{1}{\sin x}$
Chord	crd $x = 2r\frac{b}{2c}$	crd $x = 2r \sin \frac{x}{2}$

Pozn: V tabulce výše c je přepona, a je strana přilehlá a b je strana protilehlá v pravoúhlém trojúhelníku ABC.

Tangens a kotangens se dnes používají sice méně často než sinus a kosinus, ale i tak se s nimi běžně potkáváme. Se sekans a kosekans se ještě stále můžete potkat, třeba při integracích, ale běžně se již dnes nepoužívají. Pokud budeme pokračovat tabulkou níže, narazíme na funkce, které spíše patří do historie matematiky. Narazíte na ně v historických textech. Sinus versus např. využil ve svých výpočtech čínský matematik Shen Kuo, když aproximoval délku oblouku. Nic vám samozřejmě nebrání je začít používat. Mezi nimi existuje taková výjimka, semisinus versus, v anglických textech pod jménem haversine, která se používá k výpočtu délky orthodromy, tedy vzdálenosti mezi dvěma místy (nejen) na Zemi.



Obrázek 4.1: Vizualizace na jednotkové kružnici

4.2 Hodnoty goniometrických funkcí

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
0	0	1	0	∞
0.5	0.0087267	0.9999619	0.0087271	114.5861045
1.0	0.0174522	0.9998477	0.0174549	57.2905981
1.5	0.0261769	0.9996573	0.0261859	38.1884593
2.0	0.0348997	0.9993908	0.034921	28.6360941
2.5	0.0436192	0.9990482	0.0436607	22.9038674
3.0	0.052336	0.9986295	0.0524078	19.0811367
3.5	0.0610487	0.9981348	0.0611628	16.3498035
4.0	0.0697563	0.9975641	0.0699266	14.3007061
4.5	0.0784591	0.9969173	0.0787017	12.7062047
5.0	0.0871559	0.9961947	0.0874889	11.4300268
5.5	0.0958456	0.9953962	0.0962889	10.3854182
6.0	0.1045285	0.9945219	0.1051042	9.5143645

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
6.5	0.1132034	0.9935718	0.1139358	8.7768722
7.0	0.1218692	0.9925462	0.1227844	8.1443595
7.5	0.1305262	0.9914449	0.1316525	7.5957541
8.0	0.1391733	0.990268	0.140541	7.1153597
8.5	0.1478092	0.9890159	0.1494508	6.6911651
9.0	0.1564345	0.9876883	0.1583844	6.3137515
9.5	0.1650478	0.9862856	0.1673428	5.9757572
10.0	0.173648	0.9848078	0.1763268	5.6712882
10.5	0.1822355	0.9832549	0.185339	5.3955172
11.0	0.1908092	0.9816271	0.1943805	5.1445487
11.5	0.1993677	0.9799247	0.2034521	4.9151619
12.0	0.2079117	0.9781476	0.2125566	4.7046301

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
12.5	0.2164398	0.976296	0.2216949	4.5107044
13.0	0.2249509	0.9743701	0.230868	4.3314797
13.5	0.2334454	0.9723699	0.2400788	4.1652998
14.0	0.2419221	0.9702957	0.2493282	4.0107776
14.5	0.2503798	0.9681477	0.2586174	3.8667162
15.0	0.258819	0.9659258	0.2679492	3.7320508
15.5	0.2672386	0.9636304	0.2773248	3.6058808
16.0	0.2756372	0.9612617	0.2867452	3.487417
16.5	0.2840153	0.9588197	0.2962135	3.3759434
17.0	0.2923719	0.9563047	0.3057309	3.2708504
17.5	0.3007056	0.953717	0.3152986	3.1715969
18.0	0.309017	0.9510565	0.3249197	3.0776835

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
18.5	0.3173048	0.9483236	0.3345955	2.988683
19.0	0.325568	0.9455186	0.3443274	2.9042127
19.5	0.3338069	0.9426415	0.3541186	2.8239129
20.0	0.3420203	0.9396926	0.3639705	2.7474758
20.5	0.3502072	0.9366723	0.3738845	2.6746231
21.0	0.3583679	0.9335804	0.383864	2.6050891
21.5	0.3665014	0.9304175	0.3939107	2.5386465
22.0	0.3746064	0.9271839	0.404026	2.4750882
22.5	0.3826834	0.9238795	0.4142136	2.4142136
23.0	0.3907313	0.9205048	0.424475	2.3558511
23.5	0.3987489	0.9170602	0.4348121	2.2998438
24.0	0.4067366	0.9135455	0.4452287	2.2460368

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
24.5	0.4146934	0.9099612	0.4557265	2.1942986
25.0	0.4226181	0.9063079	0.4663074	2.144508
25.5	0.4305111	0.9025853	0.4769755	2.0965436
26.0	0.4383713	0.898794	0.4877328	2.0503028
26.5	0.4461976	0.8949344	0.4985814	2.0056907
27.0	0.4539905	0.8910065	0.5095254	1.9626105
27.5	0.4617488	0.8870107	0.5205673	1.9209812
28.0	0.4694714	0.8829477	0.5317092	1.8807273
28.5	0.4771588	0.8788171	0.5429557	1.8417709
29.0	0.4848098	0.8746196	0.5543093	1.8040469
29.5	0.4924234	0.8703558	0.5657725	1.7674948
30.0	0.5	0.8660254	0.5773503	1.7320508

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
30.5	0.5075385	0.8616291	0.5890453	1.6976624
31.0	0.5150379	0.8571674	0.6008604	1.6642802
31.5	0.5224986	0.8526402	0.6128008	1.6318517
32.0	0.5299194	0.848048	0.6248696	1.6003338
32.5	0.5372994	0.8433915	0.63707	1.5696862
33.0	0.544639	0.8386706	0.6494076	1.539865
33.5	0.5519371	0.8338857	0.6618858	1.5108346
34.0	0.5591927	0.8290377	0.6745082	1.4825616
34.5	0.5664062	0.8241262	0.687281	1.455009
35.0	0.5735766	0.8191519	0.7002078	1.4281474
35.5	0.5807028	0.8141156	0.7132928	1.4019489
36.0	0.5877853	0.809017	0.7265425	1.3763819

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
36.5	0.5948229	0.8038567	0.7399614	1.3514219
37.0	0.6018149	0.7986356	0.7535537	1.3270454
37.5	0.6087614	0.7933533	0.767327	1.3032254
38.0	0.6156616	0.7880106	0.7812859	1.2799411
38.5	0.6225145	0.7826083	0.7954356	1.2571728
39.0	0.6293204	0.777146	0.809784	1.2348972
39.5	0.6360784	0.7716245	0.8243367	1.2130965
40.0	0.6427875	0.7660446	0.8390993	1.1917541
40.5	0.649448	0.760406	0.8540807	1.1708496
41.0	0.6560592	0.7547095	0.8692871	1.150368
41.5	0.6626199	0.7489558	0.8847249	1.1302948
42.0	0.6691306	0.7431448	0.900404	1.1106125

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
42.5	0.6755904	0.7372772	0.9163315	1.0913081
43.0	0.6819982	0.7313538	0.9325147	1.0723691
43.5	0.6883546	0.7253744	0.9489646	1.0537801
44.0	0.6946585	0.7193397	0.9656891	1.0355299
44.5	0.7009091	0.7132506	0.9826969	1.0176078
45.0	0.7071068	0.7071068	1.0	1.0
45.5	0.7132506	0.7009091	1.0176078	0.9826969
46.0	0.7193397	0.6946585	1.0355299	0.9656891
46.5	0.7253744	0.6883546	1.0537801	0.9489646
47.0	0.7313538	0.6819982	1.0723691	0.9325147
47.5	0.7372772	0.6755904	1.0913081	0.9163315
48.0	0.7431448	0.6691306	1.1106125	0.900404

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
48.5	0.7489558	0.6626199	1.1302948	0.8847249
49.0	0.7547095	0.6560592	1.150368	0.8692871
49.5	0.760406	0.649448	1.1708496	0.8540807
50.0	0.7660446	0.6427875	1.1917541	0.8390993
50.5	0.7716245	0.6360784	1.2130965	0.8243367
51.0	0.777146	0.6293204	1.2348972	0.809784
51.5	0.7826083	0.6225145	1.2571728	0.7954356
52.0	0.7880106	0.6156616	1.2799411	0.7812859
52.5	0.7933533	0.6087614	1.3032254	0.767327
53.0	0.7986356	0.6018149	1.3270454	0.7535537
53.5	0.8038567	0.5948229	1.3514219	0.7399614
54.0	0.809017	0.5877853	1.3763819	0.7265425

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
54.5	0.8141156	0.5807028	1.4019489	0.7132928
55.0	0.8191519	0.5735766	1.4281474	0.7002078
55.5	0.8241262	0.5664062	1.455009	0.687281
56.0	0.8290377	0.5591927	1.4825616	0.6745082
56.5	0.8338857	0.5519371	1.5108346	0.6618858
57.0	0.8386706	0.544639	1.539865	0.6494076
57.5	0.8433915	0.5372994	1.5696862	0.63707
58.0	0.848048	0.5299194	1.6003338	0.6248696
58.5	0.8526402	0.5224986	1.6318517	0.6128008
59.0	0.8571674	0.5150379	1.6642802	0.6008604
59.5	0.8616291	0.5075385	1.6976624	0.5890453
60.0	0.8660254	0.5	1.7320508	0.5773503

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
60.5	0.8703558	0.4924234	1.7674948	0.5657725
61.0	0.8746196	0.4848098	1.8040469	0.5543093
61.5	0.8788171	0.4771588	1.8417709	0.5429557
62.0	0.8829477	0.4694714	1.8807273	0.5317092
62.5	0.8870107	0.4617488	1.9209812	0.5205673
63.0	0.8910065	0.4539905	1.9626105	0.5095254
63.5	0.8949344	0.4461976	2.0056907	0.4985814
64.0	0.898794	0.4383713	2.0503028	0.4877328
64.5	0.9025853	0.4305111	2.0965436	0.4769755
65.0	0.9063079	0.4226181	2.144508	0.4663074
65.5	0.9099612	0.4146934	2.1942986	0.4557265
66.0	0.9135455	0.4067366	2.2460368	0.4452287

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
66.5	0.9170602	0.3987489	2.2998438	0.4348121
67.0	0.9205048	0.3907313	2.3558511	0.424475
67.5	0.9238795	0.3826834	2.4142136	0.4142136
68.0	0.9271839	0.3746064	2.4750882	0.404026
68.5	0.9304175	0.3665014	2.5386465	0.3939107
69.0	0.9335804	0.3583679	2.6050891	0.383864
69.5	0.9366723	0.3502072	2.6746231	0.3738845
70.0	0.9396926	0.3420203	2.7474758	0.3639705
70.5	0.9426415	0.3338069	2.8239129	0.3541186
71.0	0.9455186	0.325568	2.9042127	0.3443274
71.5	0.9483236	0.3173048	2.988683	0.3345955
72.0	0.9510565	0.309017	3.0776835	0.3249197

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
72.5	0.953717	0.3007056	3.1715969	0.3152986
73.0	0.9563047	0.2923719	3.2708504	0.3057309
73.5	0.9588197	0.2840153	3.3759434	0.2962135
74.0	0.9612617	0.2756372	3.487417	0.2867452
74.5	0.9636304	0.2672386	3.6058808	0.2773248
75.0	0.9659258	0.258819	3.7320508	0.2679492
75.5	0.9681477	0.2503798	3.8667162	0.2586174
76.0	0.9702957	0.2419221	4.0107776	0.2493282
76.5	0.9723699	0.2334454	4.1652998	0.2400788
77.0	0.9743701	0.2249509	4.3314797	0.230868
77.5	0.976296	0.2164398	4.5107044	0.2216949
78.0	0.9781476	0.2079117	4.7046301	0.2125566

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
78.5	0.9799247	0.1993677	4.9151619	0.2034521
79.0	0.9816271	0.1908092	5.1445487	0.1943805
79.5	0.9832549	0.1822355	5.3955172	0.185339
80.0	0.9848078	0.173648	5.6712882	0.1763268
80.5	0.9862856	0.1650478	5.9757572	0.1673428
81.0	0.9876883	0.1564345	6.3137515	0.1583844
81.5	0.9890159	0.1478092	6.6911651	0.1494508
82.0	0.990268	0.1391733	7.1153597	0.140541
82.5	0.9914449	0.1305262	7.5957541	0.1316525
83.0	0.9925462	0.1218692	8.1443595	0.1227844
83.5	0.9935718	0.1132034	8.7768722	0.1139358
84.0	0.9945219	0.1045285	9.5143645	0.1051042

Úhel (stupně)	Sinus	Kosinus	Tangens	Kotangens
84.5	0.9953962	0.0958456	10.3854182	0.0962889
85.0	0.9961947	0.0871559	11.4300268	0.0874889
85.5	0.9969173	0.0784591	12.7062047	0.0787017
86.0	0.9975641	0.0697563	14.3007061	0.0699266
86.5	0.9981348	0.0610487	16.3498035	0.0611628
87.0	0.9986295	0.052336	19.0811367	0.0524078
87.5	0.9990482	0.0436192	22.9038674	0.0436607
88.0	0.9993908	0.0348997	28.6360941	0.034921
88.5	0.9996573	0.0261769	38.1884593	0.0261859
89.0	0.9998477	0.0174522	57.2905981	0.0174549
89.5	0.9999619	0.0087267	114.5861045	0.0087271
90	1	0	∞	0

4.3 Vzorce a vztahy

Pozn.: Vzorce, které nebyly odvozeny v této práci, či nebyl ukázán postup, jak je odvodit, byly převzaty z knihy [MVAM].

Základní vztahy

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}\ x = \frac{1}{\mathrm{cotg}\ x}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta}{1 \mp \mathrm{tg}\ \alpha\ \mathrm{tg}\ \beta}$$

$$\mathrm{cotg}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{cotg}\ \alpha\ \mathrm{cotg}\ \beta \mp 1}{\mathrm{tg}\ \beta \mp \mathrm{tg}\ \alpha}$$

Dvojnásobný a poloviční úhel

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\ 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\ \alpha}{1-\mathrm{tg}^2\ \alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\ 2\alpha = \frac{\mathrm{cotg}^2\ \alpha - 1}{2\mathrm{cotg}\ \alpha}$$

$$\mathrm{tg}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\mathrm{cotg}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Násobky argumentu sinus a kosinus

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\sin 4\alpha = 8\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 5\alpha = 16\sin\alpha\cos^4\alpha - 12\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$$

Součty a rozdíly goniometrických funkcí

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\mathrm{tg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{cotg}\ \alpha \pm \mathrm{tg}\ \beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = sin^2\alpha - \sin^2\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha = cos^2\alpha - \sin^2\beta$$

Součiny goniometrických funkcí

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\text{tg }\alpha\ \text{tg }\beta = \frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{\text{cotg }\alpha+\text{cotg }\beta}$$

$$\text{cotg }\alpha\ \text{cotg }\beta = \frac{\text{cotg }\alpha+\text{cotg }\beta}{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}$$

$$\text{tg }\alpha\ \text{cotg }\beta = \frac{\text{tg }\alpha+\text{cotg }\beta}{\text{cotg }\alpha+\text{tg }\beta}$$

Mocniny goniometrických funkcí

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$$

$$\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{4}$$

$$\sin^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha-4\cos 2\alpha+3}{8}$$

$$\cos^4\alpha = \frac{\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3}{8}$$

$$\text{tg}^2\ \alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}-1$$

$$\text{cotg}^2\ \alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}-1$$

$$\text{tg}^3\ \alpha = \frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}$$

$$\text{cotg}^3\ \alpha = \frac{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}$$

$$\text{tg}^4\ \alpha = \frac{1}{\cos^4\alpha}-\frac{2}{\cos^2\alpha}+1$$

$$\text{cotg}^4\ \alpha = \frac{1}{\sin^4\alpha}-\frac{2}{\sin^2\alpha}+1$$

Posunuté argumenty

Př. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

$x =$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\alpha \pm \frac{\pi}{2}$	$\pi - \alpha$	$\alpha \pm \pi$
$\sin x =$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\pm\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x =$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\ x =$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{cotg}\ \alpha$	$-\mathrm{cotg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$
$\mathrm{tg}\ x =$	$-\mathrm{cotg}\ \alpha$	$\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{tg}\ \alpha$	$-\mathrm{cotg}\ \alpha$	$\mathrm{cotg}\ \alpha$

Základní vztahy pro funkci Chorda

$$\mathrm{crd}^2\ \alpha + \mathrm{crd}^2\ (180^\circ - \alpha) = 4r^2$$

$$\mathrm{crd}\ (\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{crd}\ \alpha \cdot \mathrm{crd}\ (180^\circ - \beta) \pm \mathrm{crd}\ \beta \cdot \mathrm{crd}\ (180^\circ - \alpha)}{2r}$$

$$\mathrm{crd}\ \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{2r^2 - r \cdot \mathrm{crd}\ (180^\circ - \alpha)}$$

$$\mathrm{crd}\ (2\alpha) = \frac{\mathrm{crd}\ \alpha \cdot \mathrm{crd}\ (180^\circ - \alpha)}{r}$$

Součty nekonečných řad a exponenciály

$$\sin x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\mathrm{tg}\ x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

$$\mathrm{cotg}\ x = x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + O(x^7)$$

$$\sec\ x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + O(x^8)$$

$$\csc\ x = x^{-1} + \frac{1}{6}x + \frac{7}{360}x^3 + \frac{31}{15120}x^5 + O(x^7)$$

$$\sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}$$

$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}$$

$$\sin x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{2 \cdot 3 - x^2 + \cfrac{2 \cdot 3x^2}{4 \cdot 5 - x^2 + \cfrac{4 \cdot 5x^2}{6 \cdot 7 - x^2 + \dots}}}}$$

$$\cos x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{x^2}{2 - x^2 + \cfrac{2x^2}{3 \cdot 4 - x^2 + \cfrac{3 \cdot 4x^2}{5 \cdot 6 - x^2 + \dots}}}}$$

Závěr

Na závěr bych chtěl říci, že tímto historie vývoje goniometrických funkcí nekončí. Další vývoj můžeme pozorovat v 18. a 19. století, kdy Leonard Euler, Karl Friedrich Gauss a Augustin-Louis Cauchy učiní objevy na poli komplexních čísel a ukáží, že sinus je vlastně jenom obyčejná exponenciála s imaginárním exponentem.

Pokud bychom chtěli hledat jejich aplikaci, kromě již uvedených oborů, můžeme je použít k popisu chování oscilátoru libovolného typu. Taktéž polarizaci světla můžeme vyjádřit pomocí goniometrických funkcí. Pokud vám to přijde málo, můžeme je napsat do matice a vyjádřit jím rotaci prostoru kolem nějaké osy. Taktéž je můžeme použít při Fourierově transformaci. Co to je? Tato otázka může být předmětem práce, která bude nepochybně svým rozsahem větší než tato. Stručně je to matematický aparát, kterým můžeme vyjádřit vztah mezi dvěma veličinami, např. časem a frekvencí. Aplikace jsou široké, od radaru přes převod zvukového signálu do elektrických signálů, až po důkaz Heisenbergova principu neurčitosti.

Pokud přejdu ke shrnutí práce, věřím, že cíle byly dosaženy a že jsem dokázal vytvořit text, který dokáže srozumitelně vysvětlit matematickou část Ptolemaiova Almagestu i běžnému studentovi střední školy. Samotné čtení historického textu bylo velice náročné, vyžadovalo systematický postup, který jsem se snažil v hlavní části práce vysvětlit. Práce, kterou jsem vytvořil, by měla čtenáři usnadnit čtení originálního textu, kdyby se mu dostal do ruky, a osvětlit nejen tehdejší pohled na goniometrické funkce, nýbrž i samotný koncept antického matematického textu.

Nad rámec vytyčených cílů byla vytvořena třetí kapitola, ve které jsem nastínil rozvoj goniometrických funkcí, který proběhl v novověku. Její existence není pro současnou práci podstatná, nijak nerozvijí náhled na antická díla, nýbrž je takovým kořením, motivací se věnovat tématu nadále a ukazuje nový směr, kterým se tato práce někdy může vydat. Tím je myšlen náhled na goniometrické funkce skrze nástroje matematické analýzy.

Ve své práci jsem vycházel primárně z překladu Ptolemaiova Almagestu. V částech, které přímo nevycházely z jeho díla, jsem často čerpal ze studijních textů a článků zahraničních prestižních universit, namátkou University of St. Andrews ve Skotsku či Princeton University v New Jersey. Dalším velmi významným zdrojem byl text napsaný vedoucím práce, popř. jsem vycházel ze soukromých konzultací.

Přílohy

Program

```
from math import *

# součtové vzorce
soucet = lambda sina,sinb: sina*sqrt(1-sinb**2)+\
         sqrt(1-sina**2)*sinb
rozdil = lambda sina,sinb: sina*sqrt(1-sinb**2)-\
         sqrt(1-sina**2)*sinb

# Poloviční a dvojnásobný úhel
polovina = lambda sina: sqrt((1-sqrt(1-sina**2))/2)
dvojnasobek = lambda sina: 2*sina*sqrt(1-sina**2)

# Konkrétní hodnoty pro 30 a 36 stupňů
sin36 = sqrt((5-sqrt(5))/2)/2
sin30 = 1/2

#Výpočet dalších hodnot
sin6 = rozdil(sin36,sin30)
sin3 = polovina(sin6)
sin1_5 = polovina(sin3)
sin0_75 = polovina(sin1_5)
sin1 = sin0_75/0.75
sin0_5 = polovina(sin1)
```

```
# Zapisování hodnot do souboru
# Ve formátu pro LaTeX
tabulky = open("tabulky.txt",'x')
sinx = sin1_5
tabulky.write('$0$ & $0$ & $1$ & $0$ & $\infty$ \\\\')
tabulky.write('&&&& \\\\')
tabulky.write('$0.5$ & $'+str(round(sin0_5,7))+'$ & $'+\
      str(round(sqrt(1-sin0_5**2),7))+'$ & $'+\
      str(round(sin0_5/sqrt(1-sin0_5**2),7))+'$ & $'+\
      str(round(sqrt(1-sin0_5**2)/sin0_5,7))+'$ \\\\')
tabulky.write('&&&& \\\\')
for i in range(1,60):
    sinx_m = rozdil(sinx,sin0_5)
    sinx_v = soucet(sinx,sin0_5)
    tabulky.write('$'+str(i*1.5-0.5)+'$ & $'+str(round(sinx_m,7))+\
          '$ & $'+str(round(sqrt(1-sinx_m**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sinx_m/sqrt(1-sinx_m**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sqrt(1-sinx_m**2)/sinx_m,7))+'$ \\\\')
    tabulky.write('&&&& \\\\')
    tabulky.write('$'+str(i*1.5)+'$ & $'+str(round(sinx,7))+'$ & $'+\
          str(round(sqrt(1-sinx**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sinx/sqrt(1-sinx**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sqrt(1-sinx**2)/sinx,7))+'$ \\\\')
    tabulky.write('&&&& \\\\')
    tabulky.write('$'+str(i*1.5+0.5)+'$ & $'+str(round(sinx_v,7))+\
          '$ & $'+str(round(sqrt(1-sinx_v**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sinx_v/sqrt(1-sinx_v**2),7))+'$ & $'+\
          str(round(sqrt(1-sinx_v**2)/sinx_v,7))+'$ \\\\')
    tabulky.write('&&&& \\\\')
    sinx =  soucet(sinx,sin1_5)
```

```
tabulky.write('$89.5$ & $'+str(round(rozdil(sinx,sin0_5),7))+'$ & $'+\
      str(round(sqrt(1-rozdil(sinx,sin0_5)**2),7))+'$ & $'+\
      str(round(rozdil(sinx,sin0_5)/\
                sqrt(1-rozdil(sinx,sin0_5)**2),7))+\
      '$ & $'+\
      str(round(sqrt(1-rozdil(sinx,sin0_5)**2)/\
                rozdil(sinx,sin0_5),7))\
      +'$ \\\\')
tabulky.write('&&&& \\\\')
tabulky.write('$90$ & $1$ & $0$ & $\infty$ & $0$ \\\\')

tabulky.close()
```

Seznam literatury

[GT] Zajímavá matematika. MFF Uk [online]. Praha: MatFyz Press, ? [cit. 2020-10-08]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Goniometrie/Goniom-text.pdf

[Euc1] ŠÍR, Zbyněk, ed. *Řecké matematické texty: řecko-česky*. Přeložil Richard MAŠEK, přeložil Adam ŠMÍD. Praha: OIKOYMENH, 2011. Knihovna antické tradice. ISBN 978-80-7298-308-7.

[UST1] *Georg Joachim Rheticus*. MacTutor Hitory of Matematics Archive [online]. University of St. Adrews, Scotland: University of St. Andrews, 1998 [cit. 2020-09-13]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rheticus/

[UST2] *The Trigonometric Functions*. MacTutor Hitory of Matematics Archive [online]. University of St. Adrews, Scotland: University of St. Andrews, 1996 [cit. 2020-09-13]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Trigonometric_functionsy

[UST3] *Sir Isaac Newton*. MacTutor Hitory of Matematics Archive [online]. University of St. Adrews, Scotland: University of St. Andrews, 1996 [cit. 2020-10-07]. Dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton/

[PRIC1] *Newton* [online]. Princeton University, ? [cit. 2020-10-04]. Dostupné z: http://assets.press.princeton.edu/chapters/s7905.pdf. Studijní text. Priceton University.

[PLA] MOTL, Luboš a Miloš ZAHRADNÍK. *Pěstujeme lineární algebru.* 3. vyd. Praha: Karolinum, 2002. ISBN 80-246-0421-3.

[MVAM] BUBENÍK, František, Milan PULTAR a Ivana PULTAROVÁ. *Matematické vzorce a metody.* Vyd. 3., přeprac. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2010. ISBN 978-80-01-04524-4.

[MVAM] HUNT, Joseph. *The beginnings of trigonometry.* Sites.math.rutgers.edu [online]. Rutger's University, New jersey: ., 2000 [cit. 2020-10-08]. Dostupné z: https://sites.math.rutgers.edu/~cherlin/History/WWW/436-s00/Papers2000/hunt.html

[RHP1] GARDNER, Milo. *Rhind Papyrus.* Wolfram MathWolrd [online]. Rutger's University, New jersey: ., . [cit. 2020-10-08]. Dostupné z: https://mathworld.wolfram.com/RhindPapyrus.html

[RHP2] CHASE, Arnold Buffum a Henry Parker MANNING. *The Rhind Mahtematical Papyrus: Volume I* [online]. Oberlin, Ohio, USA: Mathematical association of America, 1927 [cit. 2020-10-09]. ISBN 9781258268244. Dostupné z: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7b/The_Rhind_Mathematical_Papyrus,_Volume_I.pdf

[WIKI] Steven G. Johnson na projektu Wikipedie v jazyce angličtinaVektory: Limaner – Vlastní tvorba založená na: Circle-trig6.png, CC BY-SA 3.0. Dostupné z:
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=770792

Seznam obrázků