Cvičení 12 – Působení grupy na množině

6. ledna 2026

Příklad 1. Uvažujme graf C_5, jehož vrcholy obarvujeme 3 barvami, červenou, zelenou, modrou. Kolik různých obarvení existuje až na automorfismus?

Příklad 2. Mějme graf $K_{2,3}$ a jeho vrcholy obarvujeme 2 barvami. Kolik různých obarvení existuje až na automorfismus?

Příklad 3. Uvažujme graf C_4, jehož vrcholy můžeme obarvit jednou z n barev. Kolik existuje obarvení až na automorfismus?

Příklad 4. Pro každé n určete, kolika způsoby lze obarvit stěny čtyřstěnu n barvami až na rotace.

Příklad 5 (Cauchyho věta)**.** Dokažte následující větu: mějme konečnou grupu G takovou, že prvočíslo p dělí řád G. Ukažte, že existuje prvek $a \in G$ řádu p.

1) Uvažujte $X = \{(a_1, \dots a_p) \in G^p | a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_p = 1\}$ a určete $|X|$.
2) Vymyslete, jak působí $\mathbb{Z}_p$ na X.
3) Najděte orbitu velikosti 1.
4) Použijte větu o velikosti orbity a indexu stabilizátoru.

Příklad 6. Nechť pro konečnou grupu G platí, že řád každého prvku je nejvýše 2. Ukažte, že existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $|G| = 2^k$.

Příklad 7. Mějme grupu S_n, která působí na množině $[n]^2$ tak, že $\sigma(a, b) = (\sigma(a), \sigma(b))$. Určtete počet orbit a jejich velikost. Pro prvky $(1, 1)$ a $(1, 2)$ určete, jak vypadají jejich stabilizátory a jaký mají index.

Příklad 8. Uvažujme akci grupy $(\mathbb{R}, +)$ na rovinu $\mathbb{R}^2$ tak, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$:

a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + t \\ b \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Ukažte, že je akce grupy dobře definovaná a pro $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ popište orbitu a stabilizátor.

Příklad 9. Konjugaci můžeme interpretovat jako působení grupy na sebe sama, kde prvek g působí jako $g(x) = gxg^{-1}$. Pro grupu S_4 vypište orbity a pro každou orbitu určete stabilizátor nějakého jejího prvku.

Příklad 10. Uvažte grupu G řádu p^k, kde p prvočíslo a $k \in \mathbb{N}$. Ukažte, že existuje prvek $a \in G$ různý od jednotky, který komutuje se všemi ostatními prvky.

Příklad 11. Buď X množina a G grupa na ní působící. Pak ukažte, že $|X^n/\sim| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|^n$.

Příklad 12. Určete, kolik existuje orbit na Rubikově kostce při působení grupy **Rb**. Na základě toho určete velikost **Rb**.

Domácí úkol. Kolik existuje polynomů $f \in \mathbb{Z}[x]$ s celočíselnými kořeny takových, že $\deg(f) = 2$ a $f(0) = 2026$?