Cvičení 10 – Grupy a permutace

9. prosince 2025

Příklad 1. Rozhodněte, zda následující množiny s příslušnými operacemi dávají (abelovskou) grupu:

a) $(\mathbb{Z}, +)$ a $(\mathbb{Z}, \cdot)$,

b) prostá zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se skládáním,

c) matice 3×3 nad $\mathbb{C}$ s determinantem ± 1,

d) $(R, +)$, $(R, \cdot)$, $(\mathrm{U}(R), \cdot)$, kde R je okruh,

e) množina všech slov nad abecedou $\Sigma = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, kde $aa^{-1} = bb^{-1} = e$ s konkatenací,

f) rotace stěn Rubikovy kostky **Rb** se skládáním,

g) $\mathcal{P}(X)$ s operací $\cap$, $\cup$, $\triangle$,

h) matice tvaru $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a platí, že $ad - bc = 1$.

Příklad 2. Určete řády prvků v následujících grupách:

a) 4 a 15 v $\mathbb{Z}_{75}$,

b) 7 a 9 v $\mathbb{Z}_{20}^*$,

c) 4 a 15 v $\mathbb{Z}$,

d) rotace o $144°$ v D_{10},

e) matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v $GL_3(\mathbb{C})$,

f) dvojice $(4, (1\,4\,2)(3\,5))$ v direktním součinu $\mathbb{Z}_{70} \times S_6$.

Příklad 3. Zapište následující permutace jako součin nezávislých cyklů a pro každou permutaci σ určete σ^{-1} a σ^{2025} a jejich řády.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$

b) $(4\,6\,5\,1\,2) \in S_6$

c) $(1\,5\,6)(2\,3\,8\,4\,7) \in S_8$

d) $(4\,3\,5) \circ (5\,1\,2) \in S_5$

Příklad 4. Mějme $\pi, \tau \in S_n$. Pak ukažte, že je-li v cyklickém zápisu permutace prvek π prvek b hned po prvku a, pak je v cyklickém zápisu permutace $\sigma = \tau\pi\tau^{-1}$ prvek $\tau(b)$ hned po prvku $\tau(a)$.

Příklad 5. Pro $\pi = (1\,3)(2\,5\,6\,4) \in S_6$ a $\tau = (1\,4\,3\,6)(2\,5) \in S_6$ určete $\tau\pi\tau^{-1}$ a $\pi\tau\pi^{-1}$.

Příklad 6. Najděte všechny permutace $\tau \in S_4$ takové, že pro ně platí $\tau \circ (1\,2\,3) \circ \tau^{-1} = (1\,2\,4)$.

Příklad 7. Najděte prvek řádu 2, 3, 7 v grupě **Rb**.

Domácí úkol. Najděte matice $A, B, C \in SL_3(\mathbb{F}_8)$ takové, že $\mathrm{ord}(A) = 2$, $\mathrm{ord}(B) = 3$ a $\mathrm{ord}(C) = 7$.

Pozn. Grupa $SL_n(T)$ značí grupu všech matic nad tělesem T řádu n s determinantem rovným 1.