Cvičení 9 – Aplikace konečných těles

2. prosince 2025

Příklad 1. Dokažte tvrzení, které používám prakticky každé cvičení: buď T těleso charakteristiky $p > 0$. Pak platí, že $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Příklad 2. Uvažujte Hammingův $(4,7)$-kód popsaný maticí

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dostali jste zprávu

$$00100010011101001110110110111101100010100010011001100111,$$

přičemž v každé sedmici je nejvýše jedna chyba. Najděte původní zprávu.

Příklad 3. Uvažujte Reed-Salomonův $(4,7)$-kód nad $\mathbb{Z}_{11}$ v bodech $0, 1, \ldots, 6$. Dostali jste zprávu $(2, 3, 4, 0, 6, 7, 8)$. Během přenosu nastala nejvýše 1 chyba. Najděte původní zprávu.

Příklad 4. Uvažujte těleso $\mathbb{F}_4$, kde prvky $a + b\alpha$ zapíšeme pomocí slova ab délky 2. Uvažujte Reed-Salomonův $(2,4)$-kód nad tímto tělesem, kde $u_1 = 00$, $u_2 = 01$, $u_3 = 10$ a $u_4 = 11$. Dekódujte zprávu 10011111.

Příklad 5. Na závodech se sešli sportovci z pěti kontinentů, z každého kontinentu po jednom zástupci v každé z pěti disciplín. Nakreslete nějaké rozestavení sportovců do čtverce 5×5, kde v každém řádku a každém sloupci bude po jednom sportovci z každého kontinentu a každé disciplíny, a navíc na diagonále jsou samí Evropani.

Příklad 6. Mějme těleso T a nad ním vektorový prostor V dimenze n a $1 \leq k \leq n$. Pak **Grassmanniánem** $\mathbf{Gr}_k(V)$ rozumíme množinu všech k-dimenzionálních podprostorů V. Pro $k = 1$ a $n = 2$ se jedná o projektivní rovinu. Určete $|\mathbf{Gr}_k(\mathbb{F}_q^n)|$.

Domácí úkol. Ukažte, že existuje graf s n vrcholy a $\Omega(n^{\frac{3}{2}})$ hranami, který neobsahuje $K_{2,2}$ jako podgraf.