# Cvičení 7 – Gaussovské a Eukleidovské obory

18. listopadu 2025

**Příklad 1.** Spočítejte ireducibilní rozklady prvků 3, 5, 6, $10 - 6i$ v $\mathbb{Z}[i]$.

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda existuje více rozkladů čísla 6 v oborech $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathbb{Z}[\sqrt{6}]$ a pokud ano, zkuste je najít všechny.

**Příklad 3.** Vydělte se zbytkem následující čísla:

a) $5 + 7i$ s $3 - i$ v $\mathbb{Z}[i]$,

b) $3 + 2i$ s $1 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$,

c) 4 a $1 - \sqrt{-2}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,

d) $1 + 4\sqrt{-2}$ a $3 + \sqrt{-2}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$,

e) $5 + 2\omega$ a $1 - \omega$ v $\mathbb{Z}[\omega]$, kde $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

**Příklad 4.** Spočítejte NSD pro následující dvojice a pokud to jde, určete Bézoutovy koeficienty:

a) $x^3 - 7x^2 + 15x - 9$ a $x^3 - 7x^2 + 14x - 8$ v $\mathbb{Z}[x]$,

b) 5 a $7 + i$ v $\mathbb{Z}[i]$,

c) 3 a $2 + \sqrt{-5}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,

d) $x^3 + x^2 + x + 1$ a $x^2 - 2x + 2$ v $\mathbb{Z}_3[x]$,

e) $6 - 3\sqrt{3}$ a $3 + \sqrt{3}$ v $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

**Příklad 5.** Vysvětlete následující jev:

- V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ platí, že $2(-2) = (\sqrt{-3} + 1)(\sqrt{-3} - 1)$, a proto se jedná o obor s nejednoznačným rozkladem.
- v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ platí $2\sqrt{2} = (-4 + 3\sqrt{2})(4 + 3\sqrt{2})$, ale jedná se o obor s jednoznačným rozkladem.

**Příklad 6.** Rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ nad Eukleidovským oborem $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ na součin ireducibilních prvků.

**Příklad 7.** Ukažte, že polynom $3x^3 + 2x^2 + (4 - 2i)x + (1 + i)$ je v $\mathbb{Z}[i][x]$ ireducibilní.

**Příklad 8.** Najděte v oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ nekonečně mnoho invertibilních prvků.

**Domácí úkol.** Ukažte, že pro $p \in \mathbb{N}$ prvočíslo je $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ eukleidovský obor s normou $\nu$ takovou, že pro $x = p^t u \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, kde $t, u \in \mathbb{Z}$ a $p \nmid u$, platí, že $\nu(x) = |u|$.