Cvičení 6 – Gaussova věta a Eisensteinovo kritérium

11. listopadu 2025

Příklad 1. Určete všechny racionální kořeny pro následující polynomy z $\mathbb{Z}[x]$:

a) $3x^5 - 2x^2 + x + 1$,

b) $x^3 - 7x^2 + 11x + 3$,

c) $2x^3 - x^2 + 3$.

Příklad 2. Pro zadané polynomy f a g určete NSD(f, g):

a) $f = 6x^3 - 6$, $g = 8x^2 - 8$ v $\mathbb{Z}[x]$,

b) $f = 6x^3 + 3x - 3$, $g = 6x^2 + 6x$ v $\mathbb{Q}[x]$,

c) $f = 6x^2y$, $g = 15xy^2 + x^3y$ v oboru $\mathbb{Z}[x, y]$.

Příklad 3. Ukažte, že následující polynomy jsou ireducibilní v příslušných oborech:

a) $x^3 + x^2 + x + 3$ v $\mathbb{Z}[x]$,

b) $4x^3 - 15x^2 + 60x + 180$ v $\mathbb{Z}[x]$,

c) $x^5 - 36x^4 + 6x^3 + 30x^2 + 24$ v $\mathbb{Q}[x]$,

d) $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ v $\mathbb{Z}[x]$, kde p je prvočíslo.

Hint: pro d) použijte substituci a využijte úlohu z minulého cvičení.

Příklad 4. V oboru $\mathbb{Z}[\sqrt{3}][x]$ rozložte polynom $2x^2 + 2x - 1$ na součin ireducibilních polynomů.

Příklad 5. Rozložte v $\mathbb{Z}[x]$ polynom $x^{16} - 1$ na součin ireducibilních polynomů.

Příklad 6. Pro všechna prvočísla p a přirozená čísla $n \geq 2$ dokažte, že $\sqrt[n]{p}$ je iracionální.

Příklad 7. Ukažte, že pokud je polynom f v $\mathbb{Z}[x]$ rozložitelný a prvočíslo p nedělí vedoucí koeficient f, pak platí, že je f rozložitelný i v $\mathbb{Z}_p[x]$. Zformulujte obměnu tohoto tvrzení.

Příklad 8. Za použití předchozího cvičení ukažte, že je $3x^4 + 7x^3 + 3x^2 - x + 5$ ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$.

Domácí úkol. Ukažte, že polynom $x^4 + 1$ je ireducibilní v $\mathbb{Z}[x]$, ale je rozložitelný v $\mathbb{Z}_p[x]$ pro každé p prvočíslo.