Cvičení 3 – Okruhy, obory a tělesa

14. října 2025

Příklad 1. Rozhodněte o následujících strukturách, zda jsou těleso, obor, okruh:

a) $\mathbb{Z}_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, s klasickým sčítáním a násobením,

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se sčítáním a násobením po složkách,

c) matice 2×2 nad tělesem $\mathbb{Z}_7$, značme $M_2(\mathbb{Z}_7)$, s maticovým sčítáním a násobením,

d) horní trojúhelníkové matice o rozměru 3×3 nad $\mathbb{Q}$, s maticovým násobením a sčítáním,

e) $\mathbb{Z}[i]$, komplexní čísla s celočíselnými koeficienty, s klasickým sčítáním a násobením,

f) $\mathbb{Q}[i]$, komplexní čísla s racionálními koeficienty, s klasickým sčítáním a násobením,

g) $\mathbb{Z}[[x]]$, množina všech formálních mocninných řad s celočíselnými koeficienty, s klasickým sčítáním a násobením,

h) $\mathbb{H}$, kvaterniony, reálná čísla doplněná o imaginární jednotky i, j, k splňující $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$,

i) pro libovolnou množinu S definujeme strukturu na $\mathcal{P}(S)$ takovou, že sčítání dvou množin bude symetrická diference a násobení bude rpůnik dvou množin,

j) $\mathbb{Z}$, kde sčítání definujeme jako maximum ze dvou čísel a násobení jako největší společný dělitel dvou čísel.

Příklad 2. Mějme těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$, uvažujme následující množiny:

a) $R_1 = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Z}\}$,

b) $R_2 = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \colon a, b, c \in \mathbb{Z}\}$,

c) $R_3 = \{a + b\sqrt{2} \colon a, b \in \mathbb{Q}\}$,

d) $R_4 = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \colon a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Rozhodněte, která R_i tvoří podokruh $\mathbb{C}$ a která tvoří podtěleso $\mathbb{C}$.

Příklad 3. Dokažte, že komutativita sčítání plyne z ostatních axiomů komutativních okruhů.

Příklad 4. Pro p prvočíslo dokažte, že jediné invertibilní prkvy $Z_p[x]$ jsou polynomy stupně 0.

Příklad 5. Najděte invertibilní prvek $Z_4[x]$ stupně 1. Najděte nekonečně mnoho invertibilních prkvů libovolného stupně.

Příklad 6. Určete podílové těleso pro $\mathbb{Z}[i]$ a pro $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Příklad 7. Najděte podokruh $R \leq M_2(\mathbb{R})$ takový, že $R \cong \mathbb{C}$. Obdobně nalezněte $S \leq M_2(\mathbb{R})$ takový, že $S \cong \mathbb{H}$. $\cong$ se myslí, že jsou izomorfní, tj. jeden dostaneme z druhého jen přejmenováním prvků.

Příklad 8. Mějme R okruh. Řekneme, že prvek $a \in R$ je *idempotentní*, pokud platí, že $a^2 = a$. Množinou $S(R)$ značíme množinu všech idempotentních prvků.

a) Ukažte, že pro všechna tělesa T platí, že $S(T) = \{0, 1\}$. Platí i opačná implikace?

b) Určete $S(\mathbb{Z}_{12})$.

Domácí úkol. Mějme $e \in R$ idempotentní prvek okruhu R. Rozhodněte, zda množina $eRe = \{eae \,|\, a \in R\}$ s operacemi zděděnými z R je okruh a zda je to podokruh R.